Klausurvorbereitung Folgen und Reihen

Aufgabe 1 Überprüfen Sie die Folgen $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = (2^{2n} + (-2)^{2n})2^{-2n}$

(b) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(c) $a_n = n - 5 - \frac{n^3}{n^2+5}$

(d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+10}$

(e) $a_n = 3^{1/n}$

Aufgabe 2 Wie groß muss n mindestens gewählt werden, damit sich die Partialsumme $\sum_{k=0}^{n} 0.9^k$ von der Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k$ um weniger als 10^{-6} unterscheidet.

Aufgabe 3 Überprüfen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie wenn möglich den Wert der Reihe

(a) $\displaystyle\sum_{k=100}^{\infty} \frac{9^k}{10^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (10^k\sqrt{2} - \lfloor 10^k\sqrt{2} \rfloor)10^{-k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\prod_{i=2}^{k-1}(n-i)}{\prod_{i=1}^{k}(n+i)}$

Aufgabe 4 Überprüfen Sie auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log(k^k)}.$

Aufgabe 5 Gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{x} dx?$$

Konvergiert oder divergiert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

für $n \to \infty$?

Aufgabe 1 (a) Zeigen Sie für $n = 1, 2, ...$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-3) = n(n-2).$$

Aufgabe 2 Die positive Zahl g, welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt, heißt goldener Schnitt.

(a) Bestimmen Sie g.

(b) Es sei $(x_n)_{n=0,1,2,...}$ die Folge $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass

$$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^n}.$$

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion.

(c) Zeigen Sie, dass $x_n \xrightarrow{n\to\infty} g$.

Klausurvorbereitung Komplexe Zahlen

Aufgabe 1 Sei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(b) Zeigen Sie
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Aufgabe 2 (a) Skizzieren Sie die Menge
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = |3 + 4i|\}$$
in der komplexen Zahlenebene?

(b) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 + 81 = 0$.

(c) Wieviele komplexe Lösungen hat $z^6 - 17z^5 + 8z^4 - 2z^3 - 190z^2 + z = 1$?

(d) Welche komplexen Lösungen hat die Gleichung $z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$

Aufgabe 3 (a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ und in Polarkoordinaten dar.
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \qquad (1+i)e^{i\pi/2}.$$

(b) Zeigen Sie, das zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 genau dann beide reell oder zueinander konjugiert sind, wenn sowohl $z_1 + z_2$ als auch $z_1 \cdot z_2$ reelle Zahlen sind.

Stetigkeit, Differenzieren, Integrieren...

Aufgabe 1 Beweisen Sie, dass jedes Polynom ungerader Ordnung stets mindestens eine reelle Nullstelle hat, während es für gerade Ordnungen immer Polynome gibt, die keine reellen Nullstellen haben.

Aufgabe 2 Welches Rechteck mit gegebenem Umfang U hat die größte Fläche?

Aufgabe 3 Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ heißt ungerade (gerade), falls $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$) für alle $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie: ist f ungerade und F eine Stammfunktion von f, so ist F gerade.

Aufgabe 1 (a) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für die Funktion $x \mapsto \log(1+\sin(x))$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(c) Berechnen Sie $\log(1,1)$ näherungsweise durch das quadratische Taylorpolynom von $\log x$ an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Restgliedes ab.

Aufgabe 2 (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{e^k + 1}(x-1)^k.$$

Geben Sie das größtmögliche offene Intervall an, auf dem die Reihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2}(-x)^k$$

für $|x| < 1$.

Lineare Algebra

Aufgabe 1 Handelt es sich bei den folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie gegebenenfalls die Dimension und eine Basis an.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 2 (a) Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Aufgabe 3 (a) Ist

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 0\}$$

ein Vektorraum?

(b) Betrachte den Polynomraum

$$W = \{f \text{ Polynom vom Grad höchstens } 3 : f(0) = 0\}.$$

Ist W ein Vektorraum? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis von W an.

Aufgabe 4 Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 3x + y - 5z &= 0 \\ 5x - 3y + z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8. \end{aligned}$$