Übungen zur Vorlesung
"Mathematik I"

Wintersemester 2016/17, Blatt 9

Abgabetermin: 10.1.2017, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 33 (4+4 Punkte)

Eine feste Anzahl $n \geq 3$ von Studenten wichtelt. Dazu stellen sie sich in einen Kreis und nummerieren sich von 1 bis n im Uhrzeigersinn, beginnend beim Ältesten. Nun beginnt Student 1 damit, Student 2 ein Wichtelgeschenk zu überreichen. Student 2 ist damit von dem Spiel befreit und muss den Kreis verlassen. Nun ist der Nächste im Kreis verbleibende - Student 3 - an der Reihe, seinem nächsten Nachbarn - Student 4 (bei $n > 3$) oder Student 1 (bei $n = 3$) - ein Geschenk zu überreichen, der dann wiederum den Kreis verlassen muss. So verfahren die Studenten immer weiter im Uhrzeigersinn bis nur noch einer übrig bleibt, der dann leer ausgeht. Welche Nummer $a(n)$ in Abhängigkeit von n hat der Student, der leer ausgeht?

Hinweis: Eine korrekte formale Beschreibung von a gibt bereits volle Punktzahl (4). Beweisideen und -versuche können Bonuspunkte geben.
Gehen Sie davon aus, dass jeder Student genug Geschenke bei sich hat, um in jeder Runde, in der er im Spiel bleibt, eins vergeben zu können.
Das Betrachten der binären Kodierung von n und $a(n)$ kann hilfreich sein.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Es sei (🎅_k) eine Folge mit $\text{🎅}_k \neq 0$ für große k. Begründen Sie folgendes Konvergenzkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\text{🎅}_{k+1}|}{|\text{🎅}_k|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \text{🎅}_k \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\text{🎅}_{k+1}|}{|\text{🎅}_k|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \text{🎅}_k \text{ divergiert.}$$

Was passiert, wenn die linke Seite identisch zu 1 ist? Warum reicht es nicht zu fordern, dass $|\text{🎅}_{k+1}/\text{🎅}_k| < 1$ für große k?

(bitte wenden)

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{🎁=1}^{\infty} \frac{(-1)^{🎁}}{🎁}$$

konvergiert.

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Zu einer Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definieren wir die Landau-Symbole

$$\mathcal{O}(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c > 0, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : f(n) \leq cg(n)\},$$

$$\Theta(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c > 1, N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \tfrac{1}{c}g(n) \leq f(n) \leq cg(n)\}.$$

a) Nennen Sie 4 Beispiele für Funktionenpaare (f, g) mit $f \in \mathcal{O}(g)$.

b) Zeigen Sie für $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ und $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, dass $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\max(g_1, g_2))$ und $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$.

c) Zeigen Sie, dass $o(g) := \mathcal{O}(g) \setminus \Theta(g) \supset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid f(n)/g(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$ und geben Sie ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Inklusion an.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest

und einen guten Rutsch ins neue Jahr!