# Übungen zur Vorlesung
# "Mathematik I"

**Wintersemester 2016/17, Blatt 12**

**Abgabetermin:** 31.1.2017, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 45** (4 Punkte)

Es sei $x = (1, -1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$U := \{x \times y \mid y \in \mathbb{R}^3\}$$

ein zu $x\mathbb{R} := \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ komplementärer Untervektorraum ist.

Hinweis: Dabei bezeichnet $\times$ das auf Seite 16 des Skripts eingeführte Kreuzprodukt.

**Aufgabe 46** (4 Punkte)

Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Zeigen Sie, dass der *Einsetzungshomomorphismus* $E_x : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist und geben Sie seinen Kern, $\ker E_x$, an.
Sei nun $V = P_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens $n$. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(E_1|_V)$.

**Aufgabe 47** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Kern und Bild einer linearen Abbildung $A : V \to W$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen jeweils Untervektorräume von $V$ und $W$ sind.

**Aufgabe 48** (4 Punkte)

Es seien $A : V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear unabhängig. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $Ax_1, \ldots, Ax_n$ sind linear unabhängig, wenn $A$ injektiv ist.

b) $Ax_1, \ldots, Ax_n$ sind linear unabhängig, wenn $A$ surjektiv ist.