

Übungen zur Vorlesung “Mathematik I“

Wintersemester 2016/17, Blatt 11

Abgabetermin: 24.1.2017, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 41

(4 Punkte)

Betrachten Sie für $x > 0$ das uneigentliche Integral $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Zeigen Sie die Konvergenz des Integrals.
- Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ durch partielle Integration.
- Folgern Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 42

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2})$ für $x \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 43

(4 Punkte)

- Wie lautet die Taylorreihe der Funktion $f : x \mapsto \exp(x)$ mit Zentrum $x_0 = 1$?
- Sei $f : x \mapsto x^x$. Berechnen Sie die Taylorpolynome P_0, P_1 und P_2 für f mit Zentrum $x_0 = 1$.

Aufgabe 44

(4 Punkte)

Sei $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ periodisch mit Periode } 2\pi\}$.

- Ist V ein Vektorraum?
- Ist $U := \{x \mapsto a \sin(mx) + b \cos(nx) : a, b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}\}$ ein Untervektorraum?