Übungen zur Vorlesung
"Mathematik I"

Wintersemester 2016/17, Blatt 8

Abgabetermin: 20.12.2016, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Zeigen Sie für $a > 1$ mittels Riemannscher Summen, dass

$$\int_1^a \log(x)dx = a\log(a) - a + 1.$$

HINWEIS: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$. Dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{1/n}-1}{1/n} = \log(a)$, kann hierbei hilfreich sein, ist aber bei Verwendung auch zu beweisen.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Es seien $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $b > a$, f stetig und nicht-negativ, $I := \int_a^b f(x)dx > 0$ sowie φ konvex. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{I}\int_a^b \varphi(x)f(x)dx \geq \varphi\Big(\frac{1}{I}\int_a^b xf(x)dx\Big).$$

HINWEIS: Benutzen Sie Satz 2.5(2) auf Seite 53 mit geeignet gewähltem x_0.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt eines Rechtecks mit vorgegebenem Umfang $L > 0$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Eine Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ ist gegeben durch die Menge

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1\Big\}.$$

Bestimmen Sie den von E eingeschlossenen Flächeninhalt.

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst auf $(-1, 1)$, dass $x \mapsto \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-mathe-inf-und-ing-ws-2016-17`