Übungen zur Vorlesung
“Mathematik I“

Wintersemester 2016/17, Blatt 7

Abgabetermin: 13.12.2016, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei $a > 0$ gegeben. Wir wollen $\sqrt{a}$ als Nullstelle der Parabel $y = x^2 - a$ näherungsweise berechnen, und zwar so: Ist $x_n > 0$ die n-te Näherung, so bestimme die Tangente im Punkt $(x_n, x_n^2 - a)$ und wähle x_{n+1} als deren Nullstelle. Als Startwert wählen wir ein $x_0 > \sqrt{a}$. Zeigen Sie:

a) $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

b) $f(x) \geq \sqrt{a}$ für alle $x > 0$.

c) $f(x) - x \leq 0$ für $x \geq \sqrt{a}$.

d) $x_n \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$.

e) Wie oft muss man für $a = 3, 4, 5$ und $x_0 = a$ iterieren, damit x_n auf 6 Stellen genau ist?

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass sinh eine Umkehrfunktion Arsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und zeigen Sie

$$\operatorname{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $\sinh' = \cosh$ und $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

(bitte wenden)

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und geben Sie die zugehörigen Definitionsbereiche an:

$$f(x) = x^\alpha \log(x) \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^x.$$

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b), so gilt für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$:

1.) Wenn $f'(x) \geq m$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist auch $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq m$.

2.) Wenn $f'(x) \leq M$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist auch $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq M$.