Übungen zur Vorlesung
“Mathematik I“

Wintersemester 2016/17, Blatt 4

Abgabetermin: 22.11.2016, 16:00, Briefkästen in Geb. 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 13 (4 Punkte)

a) Beweisen Sie Satz 4.5 aus dem Skript.

b) Zeigen Sie durch Beispiele von Folgen (a_n) und (b_n), dass weder aus $a_n+b_n \xrightarrow{n\to\infty} a+b$ noch aus $a_nb_n \xrightarrow{n\to\infty} ab$ folgt, dass $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei (a_n) eine gegebene Folge und $A_n := (a_1 + \ldots + a_n)/n$ der Mittelwert der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

Wie ist es mit der umgekehrten Implikation?

Hinweis: Die Folge aus Beispiel 4.4 kann hier hilfreich sein.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

$$a_n = \frac{(-1)^n(3n-1)}{n}, \qquad b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big), \qquad d_n = \frac{n!}{n^n}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Gegeben seien die harmonischen Schwingungen

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad \text{und} \qquad x_2(t) = \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Zeigen Sie, dass die Überlagerung $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ die Darstellung

$$x(t) = 2\cos(\omega t + \alpha)\cos(\varepsilon t + \delta)$$

hat, wobei

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

Skizzieren Sie für $\omega_1 = 4\pi$, $\omega_2 = 6\pi$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$.