6. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend. Zeigen Sie, dass für die beiden Funktionenklassen auf $\mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_1 := \Big\{ H(b|\cdot - \theta|^2) : b > 0, \theta \in \mathbb{R}^d \Big\} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{F}_2 := \Big\{ x \mapsto H\big((x-\theta)' B (x-\theta)\big) : B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \theta \in \mathbb{R}^d \Big\},$$

$\operatorname{sgr}(\mathcal{F}_1)$ und $\operatorname{sgr}(\mathcal{F}_2)$ VC-Klassen sind. Bestimmen Sie ferner eine obere Schranke für den jeweiligen VC-Index.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.11 aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Angenommen, der Kern K aus dem Beispiel in Kapitel 6 erfülle die Bedingungen

$$\|K\|_{\sup} \leq 1, \quad \int K \mathrm{d}\lambda = 1, \quad \int z K(z) \mathrm{d}\lambda(z) = 0 \quad \text{und} \quad \int |z|^2 K(z) \mathrm{d}\lambda(z) < \infty.$$

Welche Konvergenzrate kann man für $\|\widehat{p}_n - p\|_{\sup}$ erzielen, wenn man voraussetzt, dass p eine Lipschitz-stetige Ableitung $\nabla p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ besitzt?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(i) Sei $(\mathcal{T}, \rho)$ ein metrischer Raum und $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller $x \in \ell_\infty(\mathcal{T})$, welche in jedem Punkt $s \in \mathcal{S}$ stetig sind, ein abgeschlossener Unterektorraum von $\ell_\infty(\mathcal{T})$ ist. Hierbei bezeichne $\ell_\infty(\mathcal{T})$ den Raum der beschränkten Funktionen $x : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{M}$ aller $x \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ mit $\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von $\ell_\infty(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R}^d : u'x = r\}) = 0$ ist für beliebige $u \in \mathbb{R}^d$ und $r \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{u \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : r \leq u'x \leq r + \varepsilon\Big\}\Big) = 0.$$