# 5. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Familien messbarer Funktionen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit messbaren Einhüllenden $F$ bzw. $G$. Sei $M$ ein Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und $\int F \mathrm{d}M < \infty$, $\int G \mathrm{d}M < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für beliebige $u > 0$ gilt

$$N(u, \mathcal{F} * \mathcal{G}, \rho_M) \leq N(u/2, \mathcal{F}, \rho_M) N(u/2, \mathcal{G}, \rho_M).$$

Dabei ist $\mathcal{F} * \mathcal{G} := \{f * g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$, und $*$ bezeichnet eine der Vektorverbandsoperationen Maximum, Minimum, Summe, Differenz.

(ii) Für beliebige $u > 0$ gilt

$$N(u, \mathcal{F}\mathcal{G}, \rho_M) \leq N(u/2, \mathcal{F}, \rho_{GM}) N(u/2, \mathcal{G}, \rho_{FM}),$$

wobei $\mathcal{F}\mathcal{G} := \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ und $HM(B) := \int_B h \mathrm{d}M$ für $B \in \mathcal{B}$.

(iii) Für $1 \leq q < \infty$ gilt

$$N(U, \mathcal{F}, \rho_{M,q}) \leq N(u^q, \mathcal{F}, \rho_{(2F)^{q-1}M}),$$

wobei $\rho_{M,q}(f, g) := (\int |f - g|^q \mathrm{d}M)^{1/q}$.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

Seien $\mathcal{D}$ eine Familie von Teilmengen von $\mathcal{X}$ und $\widetilde{D}$ die Funktionenklasse der entsprechenden Indikatorfunktionen. Zeigen Sie, dass

$$V(\mathcal{D}) = V(\mathrm{sgr}(\widetilde{D})),$$

wobei $\mathrm{sgr}(\widetilde{D})$ die Familie der Subgraphen von $\widetilde{D} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ bezeichnet.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\mathcal{F}$ eine punktweise separable Familie von messbaren Funktionen. Es gelten $\mathbb{P}(F) < \infty$ für die Einhüllende $F$, punktweise gegeben durch $f(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$ (warum ist diese Einhüllende messbar?), sowie $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$, wobei $N(\varepsilon, \mathcal{F})$ die uniforme Überdeckungszahl bezeichnet. Beweisen Sie, dass dan folgt:

$$\mathbb{E}\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{F}} \to 0.$$

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine punktweise separable Familie von messbaren Funktionen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Der Partialsummenprozess $\widehat{S}_n$ sei punktweise gegeben durch

$$\widehat{S}_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{ni}) Y_{ni}$$

mit einem Dreieckschema unabhängiger ZVAs $Y_{ni}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, welche zentriert und gleichgradig integrierbar sind, und nicht-zufälligen Punkten $x_{ni}$.

Beweisen Sie: Gilt neben obigen Voraussetzungen

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(x_{ni}) = \mathcal{O}(1) \quad \text{sowie}$$

$$\frac{1}{n} \sum i = 1^n 1_{\{F(x_{ni}) > n\delta\}} F(x_{ni}) \to 0 \quad \text{für beliebige } \delta > 0,$$

wobei $F$ die Einhüllende $F(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$ von $\mathcal{F}$ bezeichnet, so konvergiert $\mathbb{E}\|\widehat{S}_n\|_{\mathcal{F}}$ gegen Null.