

5. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Familien messbarer Funktionen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit messbaren Einhüllenden F bzw. G . Sei M ein Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und $\int F dM < \infty$, $\int G dM < \infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für beliebige $u > 0$ gilt

$$N(u, \mathcal{F} * \mathcal{G}, \rho_M) \leq N(u/2, \mathcal{F}, \rho_M) N(u/2, \mathcal{G}, \rho_M).$$

Dabei ist $\mathcal{F} * \mathcal{G} := \{f * g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$, und $*$ bezeichnet eine der Vektorverbandsoperationen Maximum, Minimum, Summe, Differenz.

(ii) Für beliebige $u > 0$ gilt

$$N(u, \mathcal{F}\mathcal{G}, \rho_M) \leq N(u/2, \mathcal{F}, \rho_{GM}) N(u/2, \mathcal{G}, \rho_{FM}),$$

wobei $\mathcal{F}\mathcal{G} := \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ und $HM(B) := \int_B h dM$ für $B \in \mathcal{B}$.

(iii) Für $1 \leq q < \infty$ gilt

$$N(u, \mathcal{F}, \rho_{M,q}) \leq N(u^q, \mathcal{F}, \rho_{(2F)^{q-1}M}),$$

wobei $\rho_{M,q}(f, g) := (\int |f - g|^q dM)^{1/q}$.

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Seien \mathcal{D} eine Familie von Teilmengen von \mathcal{X} und $\tilde{\mathcal{D}}$ die Funktionenklasse der entsprechenden Indikatorfunktionen. Zeigen Sie, dass

$$V(\mathcal{D}) = V(\text{sgr}(\tilde{\mathcal{D}})),$$

wobei $\text{sgr}(\tilde{\mathcal{D}})$ die Familie der Subgraphen von $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{D}}$ bezeichnet.

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Sei \mathbb{P} ein W-Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, \mathcal{F} eine punktweise separable Familie von messbaren Funktionen. Es gelten $\mathbb{P}(F) < \infty$ für die Einhüllende F , punktweise gegeben durch $f(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$ (warum ist diese Einhüllende messbar?), sowie $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$, wobei $N(\varepsilon, \mathcal{F})$ die uniforme Überdeckungsanzahl bezeichnet. Beweisen Sie, dass dann folgt:

$$\mathbb{E} \|\hat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0.$$

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Sei \mathcal{F} eine punktweise separable Familie von messbaren Funktionen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit $N(\varepsilon, \mathcal{F}) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Der Partialsummenprozess \widehat{S}_n sei punktweise gegeben durch

$$\widehat{S}_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{ni}) Y_{ni}$$

mit einem Dreieckschema unabhängiger ZVAs Y_{ni} , $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, welche zentriert und gleichgradig integrierbar sind, und nicht-zufälligen Punkten x_{ni} .

Beweisen Sie: Gilt neben obigen Voraussetzungen

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_{ni}) = \mathcal{O}(1) \text{ sowie}$$
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = 1^n \mathbf{1}_{\{F(x_{ni}) > n\delta\}} F(x_{ni}) \rightarrow 0 \text{ für beliebige } \delta > 0,$$

wobei F die Einhüllende $F(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$ von \mathcal{F} bezeichnet, so konvergiert $\mathbb{E} \|\widehat{S}_n\|_{\mathcal{F}}$ gegen Null.