

4. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Für $m, d \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{D}_{m,d}$ die Menge aller konvexen Hüllen von bis zu m Punkten im \mathbb{R}^d . Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}_{m,d}$ eine Vapnik-Červonenkis-Klasse ist. Geben sie auch eine explizite Schranke für den VC-Index $V(\mathcal{D}_{m,d})$ an. Für welche Kombinationen (m, d) ist $\mathcal{D}_{m,d}$ punktwise separabel?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Vapnik-Červonenkis-Klassen über den Mengen \mathcal{X} bzw. \mathcal{Y} . Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} = \left\{ C \times D : C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \right\}$$

eine Vapnik-Červonenkis-Klasse über $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei \mathcal{D} die Familie aller Mengen der Form

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq h(x) \right\}$$

mit einer monoton wachsenden Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $V(\mathcal{D}) = \infty$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei \mathcal{F} die Menge der Funktionen f auf $[0, 1]$ mit $|f| \leq 1$ und $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für beliebige $x, y \in [0, 1]$. Sei weiter $\rho(f, g) = \|f - g\|_{\text{sup}}$. Zeigen Sie, dass

$$\log N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho) \leq A\varepsilon^{-1} \quad \text{für } 0 < \varepsilon \leq 1$$

mit einer Konstanten $A > 0$.