2. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(i) *(Chernov-Ungleichungen)* Leiten Sie Exponentialungleichungen für

$$\mathbb{P}(Y > np + \eta) \;\text{ und }\; \mathbb{P}(Y < np - \eta)$$

im Falle einer $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilten Zufallsvariable Y her.

(ii) Berechnen Sie Exponentialungleichungen für

$$\mathbb{P}(Y \geq \mathbb{E}Y + \eta) \;\text{ und }\; \mathbb{P}(Y \leq \mathbb{E}Y - \eta)$$

ima Falle einer Gamma- bzw. Poisson-verteilten Zufallsvariable.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Leiten Sie Exponentialungleichungen für

$$\mathbb{P}(Y \geq \mathbb{E}Y + \eta) \;\text{ und }\; \mathbb{P}(Y \leq \mathbb{E}Y - \eta)$$

im Falle einer betaverteilten Zufallsvariable her.

Hinweis: Stellen Sie $Y \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ dar als $V/(V + W)$ mit stochastisch unabhängingen ZVAs $V \sim \mathrm{Gamma}(a)$ und $W \sim \mathrm{Gamma}(b)$. Schreiben Sie dann Ungleichungen der Form $Y \geq r$ oder $Y \leq r$ als $(1 - r)V - rW \geq 0$ bzw. $(1 - r)V - rW \leq 0$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei ψ eine konvexe und stetig differenzierbare Funktion auf $[0, b)$ mit $b \in (0, \infty]$. Angenommen, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$; wir definieren ferner für jedes $x \geq 0$

$$\psi^*(x) := \sup_{\lambda \in (0,b)} (\lambda x - \psi(\lambda)).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) ψ^* ist eine nicht-negative, konvexe Funktion auf $\mathbb{R}_+$.

(ii) Für jedes $t \geq 0$ ist die Menge $\{x \geq 0 : \psi^*(x) > t\}$ nicht leer.

(iii) Die verallgemeinerte Inverse

$$(\psi^*)^{-1}(t) := \inf\{x \geq 0 : \psi^*(x) > t\}$$

besitzt die Darstellung

$$(\psi^*)^{-1}(t) = \inf_{\lambda \in (0,b)} \left(\frac{t + \psi(\lambda)}{\lambda} \right).$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $Z = (Z_t)_{t \in \mathcal{T}}$ eine endliche Familie reellwertiger ZVAs. Sei ψ eine konvexe und stetig differenzierbare Funktion auf $[0, b)$ mit $b \in (0, \infty]$, so dass $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Angenommen, für jedes $\lambda \in (0, b)$ und $t \in \mathcal{T}$ gelte

$$\psi_{T_t}(\lambda) := \log \Big(\mathbb{E} \exp(\lambda Z_t) \Big) \leq \psi(\lambda).$$

Zeigen Sie, dass dann gilt (mit der Notation aus Aufgabe 3):

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in \mathcal{T}} Z_t \right) \leq (\psi^*)^{-1} \left(\log |\mathcal{T}| \right).$$