1. Übungsblatt zur Vorlesung Empirische Prozesse

Prof. Dr. Angelika Rohde, WiSe 2016 / 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $\mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ sei die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{D}} \to 0$.

(ii) Unter welcher Voraussetzung an $\mathbb{P}$ existiert eine Konstante $C(\mathbb{P}) < \infty$, so dass

$$\mathbb{E}\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{C(\mathbb{P})}{\sqrt{n}} \,?$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{N}$ gilt:

$$\|\mathbb{P} - \mathbb{Q}\|_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}(\{k\}) - \mathbb{Q}(\{k\})|.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, d)$ ein separabler metrischer Raum, $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ und $\mathcal{D}$ eine abzählbare Familie von Borelmengen $D \subset \mathcal{X}$ mit folgender Eigenschaft:

(1)
$$\sup_{D \in \mathcal{D}} \mathbb{P}\left(U_\varepsilon(\partial D)\right) \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \searrow 0.$$

Beweisen Sie, dass gilt: $\mathbb{E}\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{D}} \to 0$.

Hinweis: Betrachten Sie zu $\varepsilon > 0$ die Funktionenfamilie

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mathcal{D}) := \left\{ (1 - d(\cdot, A)/\varepsilon)^+ : \emptyset \neq A \in \mathcal{D} \text{ oder } \emptyset \neq \mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{D} \right\}.$$

$\mathcal{F}_\varepsilon$ besteht aus $[0,1]$-wertigen Lipschitz-stetigen Funktionen zur Lipschitzkonstante $1/\varepsilon$. Schätzen Sie weiter $(\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P})(D)$ sowie $(\mathbb{P} - \widehat{\mathbb{P}}_n)(D)$ mithilfe von $\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{F}_\varepsilon}$ und (1) nach oben ab.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, d)$ ein separabler metrischer Raum und $\mathcal{F}_L$ die Familie aller Lipschitz-stetigen Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante 1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}^*\|\widehat{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}\|_{\mathcal{F}_L} \to 0$, falls

$$\mathbb{P}\left(d(\cdot, x_0)\right) < \infty.$$