Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 23.06.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien N, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ und $dP^{X_n} = f_n d\lambda$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $S_N := \sum_{n=1}^N X_n$ ist messbar,

(b) die Funktion

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)(f_1 * \ldots * f_n)(x)$$

ist eine Lebesguedichte von P^{S_N}.

Lösung. (a) Es ist $S_N = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \mathbb{1}_{\{n\le N\}}$. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist diese Summe endlich, d.h. der Limes $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k X_n \mathbb{1}_{\{n\le N\}}$ existiert. Da $\mathbb{1}_{\{n\le N\}}$ und X_n messbar sind, folgt damit die Messbarkeit von S_N.

(b) Sei $A \in \mathcal{B}$. Zu zeigen ist

$$P^{S_N}(A) = \int_A g(x) d\lambda(x).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P^{S_N}(A) &= P(S_N \in A) \\
&= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{S_n \in A\} \cap \{N = n\})\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{S_n \in A\} \cap \{N = n\}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_n \in A) P(N = n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n) P^{S_n}(A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n) \int_A (f_1 * \ldots * f_n)(x) d\lambda(x) \\
&= \int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n)(f_1 * \ldots * f_n)(x) d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im vierten Schritt die Unabhängigkeit und im letzten Schritt den Satz über monotone Kovergenz (alle Summanden sind nicht-negativ) verwendet.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Verteilungsklassen auf Faltungsstabilität.

(a) $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, die Klasse der Normalverteilungen mit Erwartungswert 0.

(b) $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda > 0\}$, die Klasse der Exponentialverteilungen.

Eine Klasse M von Verteilungen heißt stabil unter Faltung, wenn für alle $\mu, \nu \in M$ gilt, dass $\mu * \nu \in M$.

Zur Erinnerung: Die oben genannten Verteilungen sind gegeben durch ihre Dichten

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \big(\sqrt{2\pi\sigma^2}\big)^{-1} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \quad \textit{und}$$

$$f_{Exp(\lambda)}(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Lösung. (a) Die Faltungsstabilität gilt. Es seien $\sigma, \tau > 0$ und $f := f_{\mathcal{N}(0,\sigma^2+\tau^2)}$. Dann ist die Dichte der Faltung von $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ und $\mathcal{N}(0,\tau^2)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(x-y) f_{\mathcal{N}(0,\tau^2)}(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \big(2\pi\sqrt{\sigma^2\tau^2}\big)^{-1} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2\tau^2}\Big) dy \\
&= f(x) \int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\Big)^{-1} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2\tau^2} + \frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\Big) dy \\
&= f(x) \int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\Big)^{-1} \exp\Bigg(-\big(\tfrac{2\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\big)^{-1}\Big((x-y)^2\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} + y^2\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2} - x^2\frac{\sigma^2\tau^2}{(\sigma^2+\tau^2)^2}\Big)\Bigg) dy \\
&\overset{*}{=} f(x) \int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}}\Big)^{-1} \exp\Big(-\big(\frac{2\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\big)^{-1}\big(y - \frac{x\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\big)^2\Big) dy \\
&= f(x) \int_{\mathbb{R}} f_{\mathcal{N}(\frac{x\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2})}(y) dy = f(x),
\end{aligned}$$

wobei wir in $*$ benutzt haben, dass $(y-ax)^2 = (x-y)^2 a + y^2 b - x^2 ab$ für $a+b=1$.

(b) Es gilt keine Faltungsstabilität. Hier erhalten wir für $\lambda \geq \gamma > 0$ und $x \geq 0$

$$f_*(x) := \int_{\mathbb{R}} f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(x-y) f_{\mathrm{Exp}(\gamma)}(y) dy = \int_0^x \lambda\gamma e^{-\lambda(x-y)-\gamma y} dy$$

$$= \begin{cases} \big(\lambda\gamma e^{-\lambda x}\big)\big|_{y=0}^{x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{falls } \lambda = \gamma, \\ \lambda\gamma e^{-\lambda x}\big(\frac{1}{\lambda-\gamma} e^{y(\lambda-\gamma)}\big)\big|_{y=0}^{x} = \frac{\lambda\gamma}{\lambda-\gamma}\big(e^{-\gamma x} - e^{-\lambda x}\big) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist in jedem Fall $f_*(0) = 0 < f_{\mathrm{Exp}(\mu)}(0) = \mu$ für alle $\mu > 0$ und die stetige Funktion f_* kann keine Exponentialverteilungsdichte sein.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bezeichne mit $\mathscr{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ und definieren folgende σ-Algebren (Produkt- und Borel-σ-Algebra):

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) &:= \sigma(\pi_t^{-1}(A) | t \in [0,\infty), A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})) \\
\mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) &:= \sigma(O | O \in \mathscr{O}).
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass

$$\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \{\pi_J^{-1}(A^J) | J \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}, A^J \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^J)\}$$

2. Zeigen Sie, dass $A \in \bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $A \subseteq C([0,\infty))$ impliziert, dass $A = \emptyset$. Hierbei bezeichne $C([0,\infty))$ die stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}$.
3. Zeigen Sie weiter, dass Einpunktmengen $\{\omega\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ für $\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$.
4. Zeigen Sie, dass $\bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ eine strikte Inklusion ist. Ist dies ein Widerspruch zu Lemma A.57?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Produkttopologie $\mathscr{O}$ auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ durch die gröbste Topologie, sodass alle Projektion $\pi_t : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$, stetig sind, charakterisiert werden kann.

Lösung. 1. Nachrechnen!

2. Nach 1. hat jede Menge $A \in \bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R})$ hat die Form $\pi_J^{-1}(A^J)$ für $J \subset [0,\infty)$ abzählbar und $A^J \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^J)$. Seien nun $J \neq \emptyset$ und $A^J \neq \emptyset$. Wähle nun $t^* \notin J$. Damit folgt, dass für jedes $\omega \in A$ und $b \in \mathbb{R}$ ein $\omega^b \in A$ exsitiert, sodass $\pi_t\omega_t = \pi_t\omega^b$ für alle $t \in [0,\infty)\backslash\{t^*\}$ und $\pi_{t^*}\omega_b = b$. Offensichtlich kann nicht gelten, dass $A \in C([0,\infty))$. Damit folgt $J = \emptyset$ oder $A^J = \emptyset$ und damit $A = \emptyset$.
3. Es gilt
$$\{\omega\} = \bigcap_{t\in[0,\infty)} \pi_t^{-1}(\{\pi_t\omega\}). \tag{1}$$
Da $\{\pi_t\omega\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist und π_t stetig für alle $t \in [0,\infty)$ folgt, dass $\{\omega\}$ eine abgeschlossene Menge ist. Damit ist diese auch messbar bzgl. der Borel σ-Algebra.
4. Die Inklusion ist klar, da die Borel-σ-Algebra per Definition von einem größeren Mengensystem erzeugt wird. Wähle $\{\omega\} \subset C([0,\infty))$ und vlg. mit 3. um zu sehen, dass die Inklusion strikt ist.

Definition 1. Eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in(0,\infty]}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißt Brownsche Bewegung, falls:

1. Für jede Wahl von $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n$ gilt, dass $X_{t_0} = 0$ und $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$, $i = 1,\ldots,n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ verteilt sind.
2. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und einer Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in(0,\infty]}$, die 1. aus Definition 1 erfüllen. Definieren Sie dafür $\Omega = \mathbb{R}^{[0,\infty)}$, $\mathscr{F} = \bigotimes_{t\in[0,\infty)} \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X_t = \pi_t$ die Projektion auf die t'te Komponente. Definieren Sie nun über einen projektiven Limes das zugehörige Maß P. Betrachten Sie dafür für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $S_n : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$ und für $\{t_1,\ldots,t_n\} \subset [0,\infty)$ mit $|J| = n$ das Maß
$$P_J = (S_n)_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}),\ t_0 := 0.$$

Lösung. Es ist zu zeigen, dass die Maße P_J eine projektive Familie bilden. Sei dazu $J = \{t_1,\ldots,t_n\}$ und $J' = J\backslash\{t_i\}$. Wir zeigen, dass $P_{J'} = (\pi_{J,J'})_* P_J$. Definiere die Abbildung T durch $T\colon \mathbb{R}^n \ni (x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i + x_{i+1}, x_{i+2},\ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Es gilt vgl. Aufgabe 2 und Definition 78
$$\begin{aligned} T_* \otimes_{j=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) &= \otimes_{j=1}^{i-1} \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1}) \otimes \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i + t_i - t_{i-1}) \otimes_{j=i+2}^n \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1}) \\ &= \otimes_{j=1}^{i-1} \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1}) \otimes \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_{i-1}) \otimes_{j=i+2}^n \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$
Nun gilt $\pi_{J,J'} \circ S_n = S_{n-1} \circ T$ und damit
$$\begin{aligned} (\pi_{J,J'})_* P_J &= (\pi_{J,J'})_* \big((S_n)_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})\big) \\ &= (\pi_{J,J'} \circ S_n)_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \\ &= (S_{n-1} \circ T)_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \\ &= (S_{n-1})_* \big(T_* \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})\big) \\ &= P_{J'}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $(P_J)_{J\subset[0,\infty),\text{endlich}}$ eine Projektive Familie bilden und damit ein eindeutig bestimmtes Maß P existiert, sodass $(\pi_J)_*P = P_J$.

Es gilt $S_n^{-1}\colon (y_1,\dots,y_n) \mapsto (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1})$. Betrachte nun für beliebige Zeitpunkte $0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen $\pi_{t_1},\dots,\pi_{t_n}$. Es gilt $(\pi_{t_1}, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n} - \pi_{t_{n-1}}) = S_n^{-1}(\pi_{t_1},\dots,\pi_{t_n})$. Damit folgt

$$(S_n^{-1}(\pi_{t_1},\dots,\pi_{t_n}))_*P = (S_n^{-1})_*P_J = \otimes_{i=1}^n \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}).$$

Damit erfüllen die Projektionen 1. aus Definition 1.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Sind X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Dichte f_X und f_Y bzgl. λ. So hat $X+Y$ die Dichte $f_X * f_Y$ gegeben durch

$$f_X * f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(x-y)\lambda(dy).$$

Lösung. Siehe [1] Satz 14.19.

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.