Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 12

Abgabe: Freitag, 21.07.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale M, dh. $E\left[M_n^2\right] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $m \leq n$ folgende Aussagen gelten:

i) $E[(M_n - M_m)^2 \mid \mathscr{F}_m] = E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathscr{F}_m]$.

ii) $E[(M_n - M_m)^2] = E[M_n^2] - E[M_m^2]$.

Lösung. i) $E[(M_n - M_m)^2 \mid \mathscr{F}_m] = E[M_n^2 - 2M_nM_m + M_m^2 \mid \mathscr{F}_m] = E[M_n^2 - 2M_mM_m + M_m^2 \mid \mathscr{F}_m] = E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathscr{F}_m]$.

ii) Dies folgt aus (i) durch Anwenden von $E[\cdot]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie folgende Aussagen

i) Die σ-Algebra der T-Vergangenheit, definiert durch

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{A} | A \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

ist eine σ-Algebra.

ii) Für die Stoppzeit $T \equiv n$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_n$ überein für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) Sind T und S Stoppzeiten mit $T \leq S$, so gilt $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_S$.

Lösung. i) Wir zeigen die drei Eigenschaften einer σ-Algebra:

1. $\Omega \in \mathcal{F}_T$: Es gilt $\Omega \cap \{T = N\} = \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da T eine Stoppzeit ist.
2. F_T ist komplement-stabil: Sei $A \in \mathscr{F}_T$, dann gilt

$$A^c \cap \{T = n\} = (A^c \cup \{T \neq n\}) \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n,$$

da $(A^c \cup \{T \neq n\}) = (A \cap \{T = n\})^c \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. $\mathscr{F}_T$ ist $\cup$-stabil: Folgt mit dem Assoziativgesetz für $\cup$ und $\cap$.

ii) Es gilt $\{T = m\} \in \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathscr{F}_s$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

iii) [1, Lemma 9.21]

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[X_1] = 0$ und $0 < \mathrm{E}[X_1^2] < \infty$. Verwenden Sie das 0-1-Gesetz von Kolmogorov und den zentralen Grenzwertsatz, um zu zeigen, dass fast sicher

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$$

gilt, wobei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Fatou.

Lösung. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\mathbb{V}ar(X_1) = 1$. Dann impliziert der zentrale Grenzwertsatz, dass

$$\mathrm{P}\left(\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) \to \mathrm{P}(N(0,1) \le x) \text{ für } n \to \infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $x > 0$. Wir behaupten, dass

$$\mathbb{1}_{\left\{\limsup_{n\to\infty} f_n \ge x\right\}} \ge \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\left\{f_n \ge x\right\}}. \tag{1}$$

Um dies einzusehen, beachten wir, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}\left\{f_n \ge x\right\} = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}\colon n_k \to \infty \text{ und } f_{n_k} \ge x \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \limsup_{n\to\infty} f_n \ge x.$$

Wir betonen, dass diese Ungleichung im Allgemeinen strikt sein kann:

$$1 = \mathbb{1}_{\{1\ge 1\}} > \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{1-\frac{1}{n}\ge 1\}} = 0.$$

Außerdem ist die Ungleichung im Allgemeinen falsch, wenn das $\ge$ in der Menge durch $>$ ersetzt wird:

$$0 = \mathbb{1}_{\{1>1\}} < \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{1+\frac{1}{n}>1\}} = 1.$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \ge x\right) &\overset{(1)}{\ge} \mathrm{E}\left[\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ge x\}}\right] \\
&\overset{\text{Fatou}}{\ge} \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \ge x\right) \\
&\ge \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \\
&\overset{\text{CLT}}{=} \mathrm{P}(N(0,1) > x) > 0.
\end{aligned}$$

Es gilt, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ messbar bzgl. der terminalen σ-Algebra ist. Daher liefert das 0-1-Gesetz von Kolmogorov, dass

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \ge x\right) > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \ge x\right) = 1.$$

Da $x > 0$ beliebig war, folgern wir, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$ fast sicher gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Geben Sie für einen wiederholten Münzwurf (mit fairer Münze) einen Wahrscheinlichkeitsraum an und zeigen Sie, dass der Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der die Summe der Auszahlung $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von 1 bzw. -1 beschreibt, ein Martingal bzgl. seiner Filtration ist. Das Spiel endet, wenn die Auszahlung von $a \in \mathbb{N}$ erreicht ist. Ist das gestoppte Spiel immer noch ein Martingal? Was lässt sich über die Konvergenz (fast sicher und L^1) des gestoppten Spiels aussagen?

Lösung. Ein einfacher Münzwurf wird durch $\widetilde{\Omega} = \{-1, 1\}$, $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\widetilde{P} = \mathrm{unif}(\{-1,1\})$ beschrieben. Ein mehrfacher Münzwurf wird dann durch dessen Produkt beschrieben, dh. $\Omega = \widetilde{\Omega}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{A} = \widetilde{\mathscr{A}}^{\otimes\mathbb{N}}$ und $P = \widetilde{P}^{\otimes\mathbb{N}}$. Der Prozess X ist gegeben durch $X_n(\omega) = \omega_n$ und M durch $M_n(\omega) = \sum_{k\le n} \omega_k$. Wie zeigen, dass M ein Martingal bzgl. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^M$ ist. Offensichtlich gilt $M_n \in L^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt für $k \le n$, dass $M_n - M_k$ unabhängig zu $\mathscr{F}_k$ ist und damit

$$E\left[M_n|\mathcal{F}_k\right] = E\left[M_n - M_k|\mathcal{F}_k\right] + E\left[M_k|\mathcal{F}_k\right] = M_k.$$

Somit ist M ein Martingal. Definiere die Stoppzeit $T := \inf\{n \in \mathbb{N} | M_n = a\}$. T ist eine Stoppzeit, da

$$\{T = n\} = \bigcap_{k\le n-1} \{M_k < a\} \cap \{M_n \neq a\} \in \mathbb{F}_n.$$

Es ist zu zeigen, dass M^T ein Martingal ist. Verwende dazu Satz 189 oder nochmal direkt nachgerechnet: Es gilt $M_t^T \in L^1$, da

$$E\left[|M_n^T|\right] \leq \max_{k\leq n} E\left[|M_k|\right] < \infty.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} E\left[M_{n+1}^T - M_n^T|\mathscr{F}_n\right] &= E\left[(M_{n+1} - M_n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}|\mathscr{F}_n\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{T>n\}} E\left[M_{n+1} - M_n|\mathscr{F}_n\right] = 0. \end{aligned}$$

Somit ist M^T (das bei a gestoppte) Spiel ebenfalls ein Martingal.

Nach dem Hinweis gilt $T < \infty$ fast sicher und damit $M^T \to a$ für $t \to \infty$ fast sicher. Damit bleibt für die L^1-Konvergenz nur a als möglicher Grenzwert. Würde aber $M_n \to a$ in L^1 gelten, dann

$$|E\left[M_n\right] - a| \leq E[|M_n - a|] \to 0.$$

Andererseits gilt aber $E[M_n^T] = E[M_1^T] = E[M_1] = 0 \neq a$. Somit ist M^T nicht in L^1 konvergent.

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.