## Wahrscheinlichkeitstheorie
**Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

# Übungsblatt 12

**Abgabe: Freitag, 21.07.2023, um 18:00 Uhr.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale $M$, dh. $E\left[M_n^2\right] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $m \leq n$ folgende Aussagen gelten:

i) $E[(M_n - M_m)^2 \mid \mathscr{F}_m] = E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathscr{F}_m]$.
ii) $E[(M_n - M_m)^2] = E[M_n^2] - E[M_m^2]$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $T$ eine Stoppzeit. Zeigen Sie folgende Aussagen

i) Die $\sigma$-Algebra der $T$-Vergangenheit, definiert durch
$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{A} | A \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$
ist eine $\sigma$-Algebra.
ii) Für die Stoppzeit $T \equiv n$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_n$ überein für alle $n \in \mathbb{N}$.
iii) Sind $T$ und $S$ Stoppzeiten mit $T \leq S$, so gilt $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_S$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[X_1] = 0$ und $0 < \mathrm{E}[X_1^2] < \infty$. Verwenden Sie das 0-1-Gesetz von Kolmogorov und den zentralen Grenzwertsatz, um zu zeigen, dass fast sicher
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$$
gilt, wobei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

*Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Fatou.*

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Geben Sie für einen wiederholten Münzwurf (mit fairer Münze) einen Wahrscheinlichkeitsraum an und zeigen Sie, dass der Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der die Summe der Auszahlung $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von 1 bzw. $-1$ beschreibt, ein Martingal bzgl. seiner Filtration ist. Das Spiel endet, wenn die Auszahlung von $a \in \mathbb{N}$ erreicht ist. Ist das gestoppte Spiel immer noch ein Martingal? Was lässt sich über die Konvergenz (fast sicher und $L^1$) des gestoppten Spiels aussagen?