Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, 07.07.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z} : P(Y_n = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Y = j).$$

Lösung. "$\Rightarrow$": Es gilt für alle $j \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = j) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{j\}}(x) P^{Y_n}(dx) = \int_{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{j\}}(x) P^{Y}(dx) = P(Y = j),$$

denn $\mathbb{1}_{\{j\}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und beschränkt).
"$\Leftarrow$": Wir zeigen zunächst die Straffheit von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $K \subset \mathbb{Z}$ kompakt (und damit $|K| < \infty$), sodass

$$P^Y(K) >= 1 - \varepsilon/2.$$

Da K endlich existiert ein $N_K \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \in K$

$$|P^{Y_n}(\{i\} - P^Y(\{i\}))| \leq \varepsilon/(2|K|) \text{ für alle } n \geq N_K.$$

Nun gilt für alle $n \geq N_K$:

$$P^{Y_n}(K) = \sum_{i\in K} P^{Y_n}(\{i\}) \geq \sum_{i\in K} P^Y(\{i\}) - \varepsilon/(2|K|) = P^Y(K) - \varepsilon/2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Weiter sind endlich viele Maße straff, damit existiert ein $K' \subset \mathbb{Z}$ kompakt, sodass für alle $n \leq N_K$

$$P^{Y_n}(\{K'\}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Mit $K \cup K'$ erhalten wir die Straffheit. Da $\{\mathbb{1}_{\{i\}} | i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{Z})$ eine separierende Familie ist folgt $P^{Y_n} \Rightarrow P^Y$ mit Satz 128.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Lösung. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann wird durch $F_n(x) := F\left(\frac{[x\cdot 2^n]+1}{2^n}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Verteilungsfunktion definiert und das zu F_n gehörige Maß P_n ist diskret.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $\frac{[x_0\cdot 2^n]+1}{2^n} \searrow x_0$ für $n \to \infty$. Da Verteilungsfunktinen rechtsstetig sind, gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{[x_0 \cdot 2^n] + 1}{2^n}\right) = F(x_0).$$

Insbesondere gilt $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$ für alle Stetigkeitsstellen von F und damit erhalten wir nach Korollar 44 $P_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} P$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \in (0,\infty)$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n exponentialverteilt mit Parameter α_n ist, d.h. X_n besitzt die Dichte

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\alpha_n e^{-\alpha_n x}.$$

Zeigen Sie die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$, falls $\alpha_n\to\infty$ für $n\to\infty$.

Lösung. Wir zeigen zunächst, dass $X_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit. Es gilt

$$P(|X_n| > \varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \alpha_n e^{-\alpha_n x} dx = e^{-\alpha_n \varepsilon} \to 0.$$

Aus der stochastischen Konvergenz folgt die schwache Konvergenz. Damit ist der erste Beweis gefunden. Für einen alternativen Beweis betrachte die Verteilungsfunktion von X_n. Es gilt für $x \geq 0$.

$$P(X_n \leq x) = \int_0^x \alpha_n e^{-\alpha_n} x dx = 1 - e^{-\alpha_n x} \to \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

Die rechte Seite entspricht der Verteilungsfunktion der Diracverteilung $\delta_{\{0\}}$. Damit konvergieren die Verteilungsfunktionen punktweise an allen Stetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$. Dies zeigt ebenfalls die schwache Konvergenz.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es einen Homeomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und den Dirac Maßen auf $\mathbb{R}$ mit der schwachen Konvergenz gibt.

Lösung. Wir betrachten die Abbildung $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeben durch $x \mapsto \delta_{\{x\}}$. Wir zeigen die Stetigkeit mithilfe der Folgenstetigkeit: Es gelte $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$E_{P_n}[f] = f(x_n) \to f(x) = E_P[f] \text{ für alle Funktionen } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

Dies zeigt $\delta_{\{x_n\}} \Rightarrow \delta_{\{x\}}$. Umgekehrt gelte $\delta_{\{x_n\}} \Rightarrow \delta_{\{x\}}$. Damit folgt

$$E_{P_n}[f] \to E_P[f] \text{ für alle Funktionen } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

Da $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist und aus Dirac-Maßen besteht, existiert eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$, sodass

$$P(K) = 1, P_n(K) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $K \subset [a,b]$ für ein Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$f = a\mathbb{1}_{(-\infty,a)} + \mathrm{id}\cdot\mathbb{1}_{[a,b]} + b\mathbb{1}_{(b,\infty)} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$x_n = E_{P^n}[f] \to E_P[f] = x.$$