# Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

## Übungsblatt 9

**Abgabe: Freitag, 30.06.2022, um 18:00 Uhr.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Maße $\mu_n$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ gegeben durch

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n},$$

sowie

$$\mu = \lambda|_{[0,1]}$$

das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Zeigen Sie $\mu_n \Rightarrow \mu$.

*Lösung.* Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Es gilt

$$\mu_n(f) := \int f d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\mathbb{1}_{[k-1/n,k/n)}(x)\lambda(dx),$$

Nun konvergiert $\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\mathbb{1}_{[k-1/n,k/n)}(x)$ fast sicher gegen $f$ ($f$ ist stetig). Da $f$ zusätzlich beschränkt ist, folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\int f d\mu_n = \int \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\mathbb{1}_{[k-1/n,k/n)}(x)\lambda(dx) \to \int f d\lambda.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass eine Familie von Normalverteilungen genau dann straff ist, wenn die Familie der Parameter beschränkt ist.

*Lösung.* Es sei also $P_i = \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ und $X_i \sim P_i$ für alle $i \in I$. Die Familie Es gilt $(P_i)_i$ ist straff genau dann, wenn $\inf\limits_{r>0} \sup\limits_{i\in I} P_i(B_r(0)^c) = 0$. Damit folgt

$\Leftarrow$: Es gelte $\mu_i, \sigma_i^2 \leq c < \infty$ für alle $i$. Dann gilt für $r > c$ mit der Tschebycheffungleichung, dass

$$\begin{aligned} P_i(B_r(0)^c) &\leq P_i(B_{r-|\mu_i|}(\mu_i)^c) = P(|X_i - \mu_i| > r - |\mu_i|) \\ &\leq \frac{\sigma_i^2}{(r-|\mu_i|)^2} \leq \frac{c}{(r-c)^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$:

Fall 1: Sei $(\mu_i)_i$ unbeschränkt.
Für $i_r$ mit $|\mu_{i_r}| \geq r$ folgt dann mit der Symmetrie der Normalverteilung

$$\sup_{i\in I} P_i(B_r(0)^c) \geq P_{i_r}(B_r(0)^c) \geq P(X_{i_r} > \mu_{i_r}) = \frac{1}{2}.$$

Fall 2: Sei nun $\mu_i \leq C < \infty$ für alle $i$ und $(\sigma_i^2)_i$ unbeschränkt.
Mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Stetigkeit von unten ergibt sich

$$\begin{aligned} P_i(B_r(0)^c) &= P\Big(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \in B_{r/\sigma_i}\big(-\frac{\mu_i}{\sigma_i}\big)^c\Big) \\ &\geq P(X \in B_{\frac{r+|\mu_i|}{\sigma_i}}(0)^c) \overset{\sigma_i \to \infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

In beiden Fällen kann $(P_i)_i$ nicht straff sein, da das zu untersuchende Infimum durch $\frac{1}{2}$ nach unten beschränkt ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Darstellung $n = 2^{k_n} + m_n$ mit $0 \leq m_n < 2^{k_n}$. Es sei $P$ die Gleichverteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ – das heißt, $P$ hat Lebesgue-Dichte $\mathbb{1}_{[0,1]}$ – und außerdem

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \begin{cases} k_n & \text{für } \frac{m_n}{2^{k_n}} \leq \omega \leq \frac{m_n+1}{2^{k_n}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Folge der $X_n$ bezüglich $P$ auf schwache, stochastische, fast sichere und $L^p$-Konvergenz für $p \geq 1$ sowie auf gleichgradige Integrierbarkeit.

*Lösung.* Sicherlich gilt $k_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und damit $k_n^p/2^{k_n} \to 0$ für jedes $p \in [1,\infty)$. Es folgt

$$\|X_n - 0\|_{L^p}^p = \int_0^1 X_n(\omega)^p d\omega = k_n^p \cdot \frac{m_n + 1 - m_n}{2^{k_n}} = \frac{k_n^p}{2^{k_n}}$$

und damit $X_n \overset{L^p}{\to} 0$, somit auch stochastische, schwache Konvergenz und gleichgradige Integrierbarkeit. Jedoch gilt für jedes $\omega$, dass $X_n(\omega) \geq 1$ für unendlich viele $n$. Damit ist $P(X_n$ konvergiert nicht$) = P(\Omega) = 1$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $(P_i)_{i\in I}$ ist straff.
2. Für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

*Lösung.* 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Betrachte $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ für ein $k \in \{1,\ldots,d\}$. Da $(P_i)_{i\in I}$ straff ist, folgt, dass es ein $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt gibt mit $\inf\limits_{i\in I} P_i(K) \geq 1 - \varepsilon$. Setze $A := \pi_k(K)$. Dann ist $A$ kompakt und es gilt für jedes $i \in I$

$$P_i^{\pi_k}(A) = P_i\left(\pi_k^{-1}(A)\right) \overset{K \subset \pi_k^{-1}(A)}{\geq} P_i(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Also gilt $\inf\limits_{i\in I} P_i^{\pi_k}(K) \geq 1 - \varepsilon$.

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff für $k = 1,\ldots,d$ sind, existieren $K_1,\ldots,K_d \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $\inf\limits_{i\in I} P_i^{\pi_k}(K_k) \geq 1 - \varepsilon/d$. Setze $K := \bigcap\limits_{k=1}^{d} \pi_k^{-1}(K_k)$. $K$ abgeschlossen ist klar, da $K_k^c$ offen und damit $K^c$ offen. Beschränktheit ist klar, also ist $K$ kompakt. Für alle $i \in I$ gilt

$$P_i(K) = 1 - P_i(K^c) = 1 - P_i\left(\bigcup_{k=1}^{d} \pi_k^{-1}(K_k^c)\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{d} \underbrace{P_i\left(\pi_k^{-1}(K_k^c)\right)}_{\leq \varepsilon/d} \geq 1 - \varepsilon.$$

Damit gilt die Behauptung.