Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, 30.06.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Maße μ_n auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ gegeben durch

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n},$$

sowie

$$\mu = \lambda|_{[0,1]}$$

das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Zeigen Sie $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass eine Familie von Normalverteilungen genau dann straff ist, wenn die Familie der Parameter beschränkt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Darstellung $n = 2^{k_n} + m_n$ mit $0 \leq m_n < 2^{k_n}$. Es sei P die Gleichverteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ – das heißt, P hat Lebesgue-Dichte $\mathbb{1}_{[0,1]}$ – und außerdem

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \begin{cases} k_n & \text{für } \frac{m_n}{2^{k_n}} \leq \omega \leq \frac{m_n+1}{2^{k_n}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Folge der X_n bezüglich P auf schwache, stochastische, fast sichere und L^p-Konvergenz für $p \geq 1$ sowie auf gleichgradige Integrierbarkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $(P_i)_{i\in I}$ ist straff.
2. Für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.