Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 16.06.2023, um 18:00 Uhr.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{F}$, symbolisch $E[X|\mathscr{F}] := Y$, falls gilt:

i) Y ist $\mathscr{F}$-messbar.

ii) Für jedes $A \in \mathscr{F}$ gilt $E[X1_A] = E[Y1_A]$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.

ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ durch $Q^+[A] := E[1_A X^+]$ und analog Q^-. Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon-Nikodym.

Lösung. Eindeutigkeit: Es gilt $0 = E[(Y - Y')1_A]$. Da $Y - Y' > 0$ auf A folgt, dass $P[A] = 0$. Analog zeigt man, dass $\{Y' - Y > 0\}$ eine Nullmenge ist. Damit gilt $Y = Y'$ P-fast sicher.

Existenz: Konstruiere Q^+ und Q^- wie beschrieben. Per Definition gilt $Q^+ \ll P$ und $Q^- \ll P$. Der Satz von Radon-Nikodym liefert die Existenz von $\mathscr{F}$-messbaren Dichten Y^+ und Y^-. Damit gilt

$$E[X^+1_A] = E[Y^+1_A] \quad \text{und} \quad E[X^-1_A] = E[Y^-1_A].$$

Es folgt, dass $Y := Y^+ - Y^-$ die bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{F}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bzgl. $\mathscr{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3\}$

(b) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 3\}$

Lösung. Alle drei.

(a) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n > 3\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}((3, \infty)) \in \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R})$, da Projektionen messbar sind.

(b) Setze $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$. Dann gilt

$$\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \,\text{für mindestens ein}\, n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\pi^{\mathbb{N}}_{\{1,\dots,n\}}\right)^{-1} \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\pi^{\mathbb{N}}_{\{1,\dots,n\}}\right)^{-1} \left(f_n^{-1}(\{0\})\right)$$

$\pi^{\mathbb{N}}_{\{1,\dots,n\}}$ ist $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) - \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$-messbar. Da $f_n = \sum_{k=1}^{n} \pi_k^{\{1,\dots,n\}}$, ist f_n $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) - \mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar, woraus die Behauptung folgt.

(c) Für $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt: x konvergiert gegen 3 gdw.
$\forall r \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0 : |x_n - 3| < \frac{1}{r}$
d.h. $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \,\text{konvergiert gegen}\, 3\} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>n_0} \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n - 3| < \frac{1}{r}\}$,
wobei $\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n - 3| < \frac{1}{r}\right\} = \pi_n^{-1}\left(\left(3 - \frac{1}{r}, 3 + \frac{1}{r}\right)\right) \in \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ für $i = 1, 2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0,1]$ der ω_i-Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.
Hinweis: Der ω_1-Schnitt der Menge A ist definiert als $A_{\omega_1} := \{\omega_1\} \times \Omega_2 \bigcap A = \{(\omega_1, \omega_j) \in A\}$ und der ω_2-Schnitt analog.

(b) Sei $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in Ω, λ das Lebesguemaß auf Ω_1 und μ das Zählmaß auf Ω_2, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$, und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) \text{ und } \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

(c) Ist das Ergebnis in Teil b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Lösung. (a) Es sei $A \subset [0,1]$ eine nicht borelmessbare Menge. Wir setzen $B = \{(x,x) \mid x \in A\} \subset \Omega$. Für jedes $\omega_1 \in [0,1]$ ist dann

$$B_{\omega_1} = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in B\} = \begin{cases} \{\omega_1\} & \text{für } \omega_1 \in A \\ \emptyset & \text{für } \omega_1 \notin A. \end{cases}$$

In jedem Fall ist $B_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Ebenso gilt für jedes $\omega_2 \in [0,1]$

$$B_{\omega_2} = \{\omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in B\} = \begin{cases} \{\omega_2\} & \text{für } \omega_2 \in A \\ \emptyset & \text{für } \omega_2 \notin A, \end{cases}$$

also $B_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$.

Es ist aber $B \notin \mathcal{A}$, denn $A = f^{-1}(B)$ mit $f(x) = (x,x)$. Es ist f offensichtlich stetig, insbesondere messbar, folglich wäre $A \in \mathcal{B}$, wenn $B \in \mathcal{A}$ wäre.

(b) Die Diagonale ist abgeschlossen, folglich ist $D \in \mathcal{A}$. Für die Integrale ergibt sich

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) = \int_{\Omega_2} \lambda(\{y\}) d\mu(y) = \int_{\Omega_2} 0 d\mu(y) = 0$$

und

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x) = \int_{\Omega_1} \mu(\{x\}) d\lambda(x) = \int_{\Omega_1} 1 d\lambda(x) = 1.$$

(c) Da das Zählmaß nicht σ-endlich auf $\mathbb{R}$ ist ($\mathbb{R}$ kann nicht als abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen geschrieben werden, da diese immer abzählbar ist), ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen, und für $x \in [a, b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)dy.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Hinweis: Wenden Sie Fubini auf die Funktion $h : (x, y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)$ *an, mit* $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$.

Lösung. Sicherlich sind f und g produkt-messbar und E eine Borel-Menge. h ist also Produkt dreier messbarer Funktionen und somit ebenfalls produkt-messbar. Zur Integrierbarkeit von h schätzen wir ab:

$$\int_{[a,b]^2} |h| d\lambda^2 \leq \int_a^b \int_a^b |f(y)| \cdot |g(x)| dy\, dx = \int_a^b |f(y)| dy \cdot \int_a^b |g(x)| dx < \infty.$$

Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b F(x)g(x)dx \quad &= \int_a^b g(x)\Big(\int_a^x f(y)dy\Big)dx \overset{\text{Fub}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)d\lambda^2(x, y) \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int_a^b f(y)\Big(\int_y^b g(x)dx\Big)dy = \int_a^b f(y)\big(G(b) - G(y)\big)dy \\
&= G(b)\int_a^b f(y)dy - \int_a^b f(y)G(y)dy.
\end{aligned}$$