UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 16.06.2023, um 18:00 Uhr.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{F}$, symbolisch $E[X|\mathscr{F}] := Y$, falls gilt:

i) Y ist $\mathscr{F}$-messbar.

ii) Für jedes $A \in \mathscr{F}$ gilt $E[X1_A] = E[Y1_A]$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.

ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ durch $Q^+[A] := E[1_A X^+]$ und analog Q^-. Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon-Nikodym.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bzgl. $\mathscr{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n > 3\}$

(b) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^n x_k = 0$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $3\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ für $i = 1, 2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0,1]$ der ω_i-Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.
Hinweis: Der ω_1-Schnitt der Menge A ist definiert als $A_{\omega_1} := \{\omega_1\} \times \Omega_2 \bigcap A = \{(\omega_1, \omega_j) \in A\}$ und der ω_2-Schnitt analog.

(b) Sei $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in Ω, λ das Lebesguemaß auf Ω_1 und μ das Zählmaß auf Ω_2, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$, und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) \text{ und } \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

(c) Ist das Ergebnis in Teil b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen, und für $x \in [a, b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)dy.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Hinweis: Wenden Sie Fubini auf die Funktion $h : (x, y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)$ *an, mit* $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$.