UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 09.06.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ *iid* uniform auf $[0,1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ konvergiert.

Lösung. Es gilt $E[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)dx$. Weiter impliziert, $f \in L^1([0,1])$, dass $E[|f(X)|] = \int_0^1 |f(x)|dx < \infty$, da $f \in L^1([0,1])$ und damit $f(X_1) \in L^1(\Omega)$. Da $X_1, X_2, \dots$ *iid* sind, gilt dies auch für $f(X_1), f(X_2), \dots$. Die Aussage folgt nun mit Theorem 50 (starkes Gesetz großer Zahlen).

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i^{(n)}] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(X_i^{(n)} - \mathrm{E}[X_i^{(n)}] \Big) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^n (X_i - \mathrm{E}[X_i]) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass die obige folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel-Cantelli.

Lösung.

Mit der Ungleichung von Chebychev erhalten wir für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^{(n)} - \mathrm{E}[X_i^{(n)}])\Big| \geq \varepsilon\Big) &= \mathrm{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n X_i^{(n)} - \mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^n X_i^{(n)}\Big]\Big| \geq n\varepsilon\Big) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^n X_i^{(n)}\Big]}{n^2\varepsilon^2} \overset{\text{unk.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i^{(n)}]}{n^2\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert nach Voraussetzung gegen 0 für jedes $\varepsilon > 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach dem ersten Teil reicht es für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zu beweisen, dass $n^{-2}\sum_{i=2}^n \mathrm{Var}(X_n)$ eine Nullfolge ist. Es gilt $\mathrm{E}[X_n] = 1/\log n$ und $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}[X_n^2] - (\mathrm{E}[X_n])^2 = n/\log n - 1/(\log n)^2$. Es folgt

$$0 \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n \Big(\frac{i}{\log i} - \frac{1}{(\log i)^2}\Big) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i}$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i} = \frac{1}{n^2}\frac{2}{\log 2} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=3}^n \underbrace{\frac{i}{\log i}}_{\text{wachsend}}$$

$$\le \frac{1}{n^2}\frac{2}{\log 2} + \frac{1}{n^2}(n-2)\frac{n}{\log n} \to 0.$$

Starkes Gesetz gilt nicht. Zunächst gilt

$$\sum_{n=2}^\infty \mathrm{P}(X_n = n) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n} = \infty.$$

Davon kann man sich leicht mit dem Integralvergleichskriterium für Konvergenz von Reihen überzeugen. (Das unbestimmte Integral $\int_2^\infty (x\log x)^{-1}\,dx = [\log(\log x)]_2^\infty$ konvergiert nicht.) Nach dem zweiten Borel-Cantelli Lemma folgt

$$\mathrm{P}(X_n = n \text{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Auf dem Ereignis $\{X_n = n\}$ gilt $\frac{1}{n}(X_n - \mathrm{E}[X_n]) = 1 - \frac{1}{n\log n} \ge 1 - \varepsilon$ für hinreichend große n. Damit erhalten wir

$$\mathrm{P}\Big(\frac{1}{n}(X_n - \mathrm{E}[X_n]) \ge 1-\varepsilon \text{ für unendlich viele } n\Big) = 1,$$

also kann $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^n (X_n - \mathrm{E}[X_n])$ nicht P-f.s. gegen Null konvergieren.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $V := \sup\{\mathrm{Var}[X_n] : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie $k_n = 2^n$ und $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ für $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie $l(k_{n+1})/l(k_n)$. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes n und für $k \in \mathbb{N}$ mit $k_{n-1} \le k \le k_n$, dass $\frac{|S_k|}{l(k)} \le \frac{2|S_k|}{l(k_n)}$. Verwenden Sie nun die Komogorov'sche Ungleichung und Borel-Cantelli, um zu zeigen, dass für beliebiges $\delta > 0$ gilt , dass $\limsup_{n\to\infty} l(k_n)^{-1}\max\{|S_k| : k \le k_n\} \le \delta$ fast sicher.

Lösung. Setze $k_n = 2^n$ und $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{l(k_{n+1})}{l(k_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

Daher gilt für hinreichend großes n und für $k \in \mathbb{N}$ mit $k_{n-1} \le k \le k_n$, dass $\frac{|S_k|}{l(k)} \le \frac{2|S_k|}{l(k_n)}$. Also reicht es, für $\delta > 0$ zu zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} l(k_n)^{-1}\max\{|S_k| : k \le k_n\} \le \delta \quad \text{fast sicher.} \tag{1}$$

Für $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setze $A_{\delta,n} := \{\max\{|S_k| : k \le k_n\} > \delta l(k_n)\}$. Die Kolmogorov'sche Ungleichung liefert

$$\sum_{n=1}^\infty P(A_{\delta,n}) \le \sum_{n=1}^\infty \delta^{-2}(l(k_n))^{-2}Vk_n = \frac{V}{\delta^2(\log 2)^{1+2\varepsilon}}\sum_{n=1}^\infty n^{-1-2\varepsilon} < \infty.$$

Das Borel-Cantelli-Lemma liefert nun $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_{\delta,n}\right) = 0$, also (1).

Aufgabe 4 (2 Bonus)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, dann folgt $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.
2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $a_{n_k} \to a$, dann folgt $a_n \to a$.

Hinweis: Diese zwei Aussagen wurden im Beweis von Lemma 43 verwendet. Es ist sinnvoll, diesen nach dem Bearbeiten der Übungsaufgabe zu wiederholen.

Lösung.

1. Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, wissen wir, dass die Reihe konvergiert und damit eine Cauchy folge ist. Das bedeutet, dass für jede positive Zahl ε ein Index N existiert, sodass für alle $m \geq n \geq N$ gilt:

$$|\sum_{n=k}^{m} a_k| = |\sum_{n=k}^{\infty} a_k - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_k| \leq \varepsilon$$

   Mit $m \to \infty$ folgt $|\sum_{n=k}^{\infty} a_k| \leq \varepsilon$.

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})k \in \mathbb{N}$, sodass $a_{n_k} \to a$. Wir wollen zeigen, dass dann $a_n \to a$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Folge monoton wachsend ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_{n_k} \to a$, gibt es einen Index N, sodass für alle $k \geq N$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K.$$

   Da die Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend ist, ist $a_n \geq a_{n_k} \geq a$ für alle $n \geq n_k$. Daher haben wir für alle $n \geq n_K$:

$$|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K.$$

   Das bedeutet, dass für jeden Index $K = n_K$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit haben wir gezeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, d.h., $a_n \to a$.