Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 26.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte Bonus). Zeigen Sie, dass eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] = 0. \tag{1}$$

Folgern Sie damit Korollar 27.

Lösung. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] = 0.$$

Dies zeigt die Hinrichtung. Sein nun

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] > \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$. Da $r \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>r\}}]$ monoton fallend in r ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, sodass $E[|X_{n_k}| \mathbb{1}_{\{|X_{n_k}|>k\}}] > \varepsilon$. Für festes r gilt nun

$$E[|X_{n_k}| \mathbb{1}_{\{|X_{n_k}|>r\}}] \geq E[|X_{n_k}| \mathbb{1}_{\{|X_{n_k}|>k\}}] > \varepsilon \text{ für alle } k > r.$$

Damit folgt $\limsup_{k\to\infty} E[|X_{n_k}| \mathbb{1}_{\{|X_{n_k}|>r\}}] > \varepsilon$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] > \varepsilon.$$

Korollar 27 folgt nun mit

$$\limsup_{n\to\infty} E[|X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X_n|^p>r\}}] = \limsup_{n\to\infty} E[|X_n|^p - |X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X_n|^p\leq r\}}] = E[|X|^p - |X|^p \mathbb{1}_{\{|X|^p\leq r\}}] \to 0 \ (r\to\infty).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathscr{F}$. Es sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ , \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

Lösung. Sei $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \omega \in \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \omega \in \cap_{k=n_0}^{\infty} A_k \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall k \geq n_0 : \ \omega \in A_k \\
&\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ \omega \in \cup_{k=n}^{\infty} A_k \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \in \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ für reelle Folgen sollte aus Analysis 1 bekannt sein und darf ohne Beweis verwendet werden.

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \overset{(2)}{\geq} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} P(A_k) = \limsup_{n\to\infty} P(A_n)$$

(1) gilt, da $\cup_{k=n}^{\infty} A_k \searrow$ mit $n \to \infty$.
(2) gilt, da $\forall n \in \mathbb{N} : \sup_{k\geq n} P(A_k) \leq P(\cup_{k\geq n} A_k)$

Für den zweiten Teil hat man zunächst mit den *de-morganschen Regeln* (alternativ kann man den gleichen Beweis nochmal für liminf führen):

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$$

$$\begin{aligned}
1 - P(\liminf_{n\to\infty} A_n) &= P\left(\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c\right) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n^c) \\
&\overset{\text{1. Teil}}{\geq} \limsup_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(1 - P(A_k)) = 1 - \liminf_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, dass

$$P\Big[\text{ Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n > n \Big] = 0.$$

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P[X_n > n] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_0 > n] \\
&= E[X_0] \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda < \infty
\end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt damit

$$P\left[\limsup_{n\to\infty} A_n\right] = 0.$$

Ein Element $\omega \in \Omega$ liegt in unendlich vielen A_n genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\text{es für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ein } m \geq n \text{ gibt, sodass } \omega \in A_m, \\ \text{d.h.} \quad &\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m, \\ \text{d.h.} \quad &\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$P\Big[\text{ Für unendliche viele } n \text{ gilt } X_n \geq n \Big] = P\left[\limsup_{n\to\infty} A_n\right] = 0.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für die folgenden Identitäten:

1. $P(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\}) = P(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\})$.
2. $P(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}) = \limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\})$.
3. $\limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = P(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\})$.

Lösung. Beispiel für 1.-3.:
$X_n \equiv c \in \mathbb{R}$ für alle n, dann sind alle 3 Werte identisch mit $\mathbb{1}_A(c)$.

Gegenbeispiel für 1.-3.:
X_n unabhängige Münzwürfe mit Werten in $\{0,1\}$, $A = \{0\}$. Dann gilt nach Borel-Cantelli $P(\limsup\{X_n \in A\}) = 1$. Außerdem ist $\limsup P(X_n \in A) = 1/2$ und $\limsup X_n$ ist wieder nach Borel-Cantelli fast sicher 1, womit $P(\limsup X_n = 0) = 0$.

Aufgabe 5 (4 +2 Punkte)**.** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra liegen.

1. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
2. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,
3. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
4. $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
5. $\{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$,
6. $\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} S_n(\omega)\}$.

Hinweis: Jeder Teil dieser Aufgabe gibt einen Punkt. Damit sind hier 2 Bonuspunkte möglich.

Lösung.

1. Ist $P(X_1 = 0) \in (0,1)$ und $X_n \equiv 0$ und damit $\mathscr{F}_n = \{\emptyset, \Omega\}$ für alle $n > 1$, dann ist
$$\{X_1 = 0\} \notin \sigma(X_2, X_3, \ldots) \supset \bigcap_{m\geq 1} \sigma(X_m, X_{m+1}, \ldots) = \mathcal{T}(\mathbb{F}).$$
2. Ist $P(X_1 = 0) \in (0,1)$ und $X_n \equiv 1$, ist analog zu a)
$$\{X_n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \{X_1 = 0\} \notin \mathcal{T}(\mathbb{F}).$$
3. $\{X_n = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\} = \liminf_n \{X_n \neq 0\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \{X_n \neq 0\}$. Da wir für größere m immer weniger Mengen schneiden, ist der große Schnitt nicht-fallend in m und damit für jedes $k \geq 1$: $\bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \{X_n \neq 0\} = \bigcup_{m\geq k} \bigcap_{n\geq m} \{X_n \neq 0\} \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$.

4. Wählen wir (X_n) wie in a), dann ist $S_n = X_1$ für alle n und damit analog zu a)

$$\{S_n = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\} = \{X_1 \neq 0\} \notin \mathcal{T}(\mathbb{F}).$$

5. Eine Folge (a_n) enthält genau dann *keine* monoton wachsende Teilfolge, wenn es nur endlich viele Paare $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ gibt mit $k < \ell$ und $a_k \leq a_\ell$. Damit folgt

$$\{(X_n) \text{ enthält monoton wachsende TF}\} = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} \bigcup_{\ell \geq k+1} \{X_k \leq X_\ell\}.$$

   Da wir für größere n über weniger Mengen vereinigen, ist $B_n := \bigcup_{k \geq n} \bigcup_{\ell \geq k+1} \{X_k \leq X_\ell\} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ monoton fallend in n und damit folgt analog zu c), dass $\bigcap_n B_n \in \mathcal{T}(\mathbb{F})$.

6. $\{\limsup\limits_{n\to\infty} S_n > \liminf\limits_{n\to\infty} S_n\} = \{(S_n) \text{ konvergiert nicht}\} = \{(S_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge}\}^c$. Wir betrachten

$$\{(S_n) \text{ ist Cauchy}\} = \{\forall k \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq N : |S_n - S_m| < \tfrac{1}{k}\}$$

$$= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \bigcap_{m \geq n} \Big\{ \Big| \sum_{\ell=n+1}^{m} X_\ell \Big| < \tfrac{1}{k} \Big\}.$$

   Analog zu c) und e) erhalten wir, dass für jedes k die große Vereinigung in $\mathcal{T}(\mathbb{F})$ liegt, also auch der Schnitt über k.