# Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

## Übungsblatt 4

**Abgabe: Freitag, 19.05.2022, um 18:00 Uhr.**

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Begründen oder widerlegen Sie:

1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$, wobei $\lambda|_{[0,1]}$ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$ bezeichnet. Dann haben $X_1$ und $X_2$ mit $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ die gleiche Verteilung.
2. Sei $(\Omega, \mathscr{F}) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$. Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P$, sodass $X_1$ und $X_2$ mit $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ nicht die gleiche Verteilung haben.
3. Sei $X \sim \mathcal{N}(2,2)$ normalverteilt mit Erwartungswert 2 und Varianz 2. Dann gilt, dass $P[|X-2| \geq 2] \leq \frac{1}{2}$.
4. Jede reellwertige Zufallsvariable besitzt eine Dichte bezüglich dem Lebesgue-Maß.
5. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Falls $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (die Potenzmenge von $\Omega$), dann sind alle Abbildungen $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar.
6. Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ normalverteilt. Es gilt $E[XY] \leq \sqrt{2}$.
7. Eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable $X$ ist genau dann zu sich selbst unabhängig, wenn sie fast sicher konstant ist.
8. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = \mathbb{1}_A$ und $Y = \mathbb{1}_B$ für $A, B \in \mathscr{A}$. Es gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$ genau dann, wenn $A$ und $B$ unabhängig sind.
9. Sei $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Dann gilt $E[X^4] \geq E[X]^4$.
10. Seien $\mu, \nu$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{A})$, welche die selben Nullmengen besitzen. Dann existiert eine messbare Abbildung $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, sodass
$$\mu(A) = \int_A f(\omega)\nu(d\omega).$$
11. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Falls $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, so gibt es keine messbare Abbildung
$$f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$
12. Sei $X$ exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = 6$ und $Y$ exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = \frac{1}{3}$. Dann gilt
$$E[XY] \leq 1.$$
*Hinweis: Für eine zum Parameter $\lambda$ exponentialverteilte Zufallsvariable $Z$ gilt $E[Z] = \frac{1}{\lambda}$ und $E[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2}$.*
13. $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ impliziert $X \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, P)$ für alle $q \leq p$, wobei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

*Hinweis: Wiederholen Sie zunächst Satz 6 und Satz 8 bevor Sie versuchen die Aufgaben lösen.*

**Aufgabe 2** (3 Punkte)**.** Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$ und $P = \lambda|_{[0,1]}$ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen sei gegeben durch

$$X_1 = 0 \text{ und } X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher.
3. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $L^2$.
4. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

**Aufgabe 3** (3 Punkte)**.** Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P)$. Das Maß $P$ sei absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ mit Dichte

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \omega \in [0,1].$$

Sei die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen gegeben durch

$$X^n(\omega) = \omega^{1/n}, \quad \omega \in [0,1].$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher.
3. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $L^1$.
4. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.