Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 12.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien (X_n) eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen und X eine weitere $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, so gilt

(a)
$$X_n \stackrel{f.s.}{\to} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \Leftrightarrow \sup_{m\geq n} |X_m - X| \stackrel{P}{\to} 0$$

(b) konvergiert $X_n \stackrel{f.s.}{\to} X$, so auch stochastisch $(X_n \stackrel{P}{\to} X)$.

(c) Stochastisches Cauchy-Kriterium. Sind die (X_n) P-fast sicher konvergent, so ist das äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{|X_{m+n} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Lösung. Das ist Satz 5.2 aus dem Rüschendorf Skript:

Satz §5.2. *Seien (X_n) reelle Zufallsvariablen, so gilt*

(1)
$$X_n \to X_0\,[P] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X_0| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \Leftrightarrow \sup_{m\geq n} |X_m - X_0| \underset{P}{\to} 0$$

(2) konvergiert $X_n \to X_0\,[P]$, so auch $X_n \underset{P}{\to} X_0$.

(3) Stochastisches Cauchy Kriterium. *Sind die (X_n) P-fast-sicher konvergent, so ist das äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$,*
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{|X_{m+n} - X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

*Beweis.*zu (1) Sei
$$A := \left\{\omega \in \Omega \middle| \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_0(\omega)\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \{|X_n - X_0|\} \leq \frac{1}{k}\right\}$$

Konvergiere jetzt $X_n \to X_0\,[P]$, so ist das äquivalent dazu, dass
$$0 = P(A^C) = P\Bigg(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \left\{|X_n - X_0| \leq \frac{1}{k}\right\}}_{=:B_m\downarrow}\Bigg)$$
$$\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} P(B_m) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} :\ 0 = \lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{n\geq m} |X_n - X_0| > \frac{1}{k}\right), \text{ d.h. } \sup_{n\geq m} |X_m - X_0| \underset{P}{\to} 0$$

zu (2) Es folgt aus $X_m \to X_0\,[P]$
$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X_m - X_0| > \varepsilon) \leq P\left(\sup_{n\geq m} |X_n - X_0| > \varepsilon\right) \to 0$$

zu (3) Seien die (X_n) P-fast-sicher konvergent (Schreibweise: $X_n \to [P]$), so ist das äquivalent dazu, dass (X_n) fast sicher eine Cauchyfolge ist, was dazu äquivalent ist, dass $P(A) = 1$ mit
$$A := \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \text{ ist Cauchyfolge}\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{|X_m - X_n| \leq \frac{1}{k}\}$$

□

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller, integrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $X_n \to_P X$, $Y_n \to_P Y$ und $Z_n \to_P Z$. Zeigen Sie:

(a) $X_n + Y_n \to_P X + Y$.

(b) Gilt zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$, so folgt $E[Y_n] \to E[Y]$.

Hinweis: Verwenden Sie für b) Theorem 22.

Lösung. (a) Es gilt $\{|X_n + Y_n - (X + Y)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| > \varepsilon/2\}$. Deshalb gilt für alle $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n + Y_n - (X + Y)| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon/2) + \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - Y| > \varepsilon/2).$$
Daraus folgt die Behauptung.

Ein anderer Beweis funktioniert mit der Bemerkung nach Satz 5.5 (Rüschendorf Skript), indem man eine beliebige Teilfolge in $\mathbb{N}$ gegeben hat. In dem Skript steht $[P]$ für fast sichere Konvergenz (f.s.).

Satz §5.5. *Seien (X_n) reelle Zufallsvariablen mit $X_n \underset{P}{\to} X_0$, so existiert eine Teilfolge $(m) \subset \mathbb{N}$, so dass $X_m \to X_0\,[P]$.*

O.B.d.A. sei diese $\mathbb{N}$ selbst. Dann gibt es nach Satz 5.5 eine Teilfolge $(n_k) \subset \mathbb{N}$ mit $X_{n_k} \to X$ $f.s.$. Weiter gibt es eine Teilfolge $(n_{k_l}) \subset (n_k)$ für die $Y_{n_{k_l}} \to Y$ $f.s.$ gilt. Da die Vereinigung von zwei Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt $X_{n_{k_l}} + Y_{n_{k_l}} \to X + Y$ $f.s.$ Mit der genannten Bemerkung erhalten wir so die Aussage. (Jede Teilfolge $X_{n_k} + Y_{n_k}$ besitzt eine Teilteilfolge, die stochastisch gegen $X + Y$ konvergiert.) Vorsicht: Dieses Argument darf bei der fast sicheren Konvergenz nicht angewendet werden, da dies keine topologische Konvergenz ist.

(b) Wir stellen zunächst fest, dass der stochastische Grenzwert einer Folge von nichtnegativen Zufallsvariablen fast-sicher nichtnegativ ist.
Denn angenommen $V_n \geq 0$ und $V_n \to_P V$ mit $P(V < 0) > \varepsilon$. Es ist $\{V < 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{V < -1/n\}$. Deshalb gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $P(V < -\delta) > 0$. Wegen $V_n \geq 0$ folgt dann $0 < P(V < -\delta) \leq P(|V_n - V| \geq \delta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht der Annahme $V_n \to_P V$.

Wir betrachten nun die Folge $(Z_n - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen $X_n \leq Z_n$ gilt $E|Z_n - X_n| = E[Z_n] - E[X_n] \to E[Z] - E[X] = E|Z - X|$. Aus den Voraussetzungen, Teil a) und Korollar 27 folgt, dass $Z_n - X_n$ gleichgradig integrierbar ist.
Wegen $0 \leq Y_n - X_n \leq Z_n - X_n$, erhalten wir so, dass auch $Y_n - X_n$ gleichgradig integrierbar ist. Folglich gilt nach Teil a) und Satz 5.8 $E[Y_n] - E[X_n] = E|Y_n - X_n| \to E|Y - X| = E[Y] - E[X]$. Wegen $E[X_n] \to E[X]$ folgt daraus $E[Y_n] \to E[Y]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie folgendes Glücksspiel: Wenn Ihr Kapital vor der n-ten Runde K_{n-1} beträgt, gewinnen Sie in der n-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze $\frac{5}{3}K_{n-1}$, sofern Kopf erscheint, sonst erhalten Sie $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

(a) Berechnen Sie EK_n, und überzeugen Sie sich, dass $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass K_n stochastisch gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i. Betrachten Sie in Teil b) die Zufallsvariable $\log K_n$ und wenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen an.

Lösung. Es ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariabeln, mit $P(Y_i = \frac{5}{3}) = \frac{1}{2} = P(Y_i = \frac{1}{2})$.

(a) Aus dieser Darstellung folgt mit dem Produktsatz für den Erwartungswert $EK_n = \prod_{i=1}^n EY_i = (EY_1)^n$. Es ist $EY_1 = \frac{1}{2}\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{13}{12} > 1$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$.

(b) Wir betrachten $\log K_n = \sum_{i=1}^n \log Y_i$. Wegen $E \log Y_i = \frac{1}{2}\log\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log\frac{5}{6} < 0$ und $E(\log Y_i)^2 = \frac{1}{2}(\log\frac{5}{3})^2 + \frac{1}{2}(\log\frac{1}{2})^2 < \infty$ folgt mit dem schwachen Gesetz großer Zahlen (Tschebycheff)
$$\frac{1}{n}\log K_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log Y_i \to_P E\log Y_1 < 0.$$
D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt
$$P\left(\frac{1}{n}\log K_n > E\log Y_1 + \varepsilon\right) \to 0.$$
Ist $\delta > 0$ gegeben, so gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt $\frac{1}{n}\log\delta > E\log Y_1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon = |E\log Y_1|/2$. Es folgt
$$P(K_n > \delta) = P\left(\frac{1}{n}\log K_n > \frac{1}{n}\log\delta\right) \leq P\left(\frac{1}{n}\log K_n > E\log Y_1 + \varepsilon\right) \to 0.$$
Dies zeigt $K_n \to_P 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, P-fast-sichere und L^p-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?

Lösung. Stochastische Konvergenz: Ja, da $P(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \to 0$. (oder auch wegen L^1-Konvergenz)
Fast sichere Konvergen: Nein, da die Familie $(\{X_n \geq 1\})_n$ ist stochastisch unabhängig mit $\sum P(X_n \geq 1) = \sum \frac{1}{n} = \infty$. Daher gilt nach Borel-Cantelli

$$1 = P(\limsup\{X_n \geq 1\}) = P(X_n \geq 1 \text{ für } \infty\text{-viele } n) = P(\limsup X_n \geq 1)$$

und daher $P(X_n \to 0) = 0$.
L^p Konvergenz: Es ist $\|X_n - 0\|_{L^p} = \mathrm{E}[X_n^p] = n^{\frac{p}{2}-1}$, was genau dann gegen 0 konvergiert, wenn $p < 2$.
Gleichgradige Integrierbarkeit: Konvergiert in L^1, ist also gleichgradig integrierbar.