Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 05.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Bonus 4 Punkte)**.** Sein Ω', Ω Mengen und $f\colon \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathscr{E}$ ein Mengensystem auf Ω. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})).$$

Hinweis: Wir benutzen folgende Notation: $f^{-1}(\mathscr{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathscr{A}\}$ *für ein Mengensystem* $\mathscr{A}$ *auf* Ω*. Für "* $\supseteq$ *" ist es hilfreich die Menge* $\mathscr{F} := \{A \in \sigma(\mathscr{E}) | f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))\}$ *zu betrachten. Zeigen Sie zunächst, dass* $\mathscr{F}$ *eine* σ*-Algebra ist.*

Lösung. " $\subseteq$ ": Da $\sigma(\mathscr{E})$ eine σ-Algebra ist, ist $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))$ wieder eine σ-Algebra (Übungsblatt 1 und 2) und es gilt $\sigma(f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))$. Insgesamt erhalten wir

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})).$$

" $\supseteq$ ": Wir betrachten die Menge $\mathscr{F} := \{A \in \sigma(\mathscr{E}) | f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))\}$. Diese ist eine σ-Algebra:

$$\begin{aligned}
\emptyset \in \mathscr{F}, &\text{ da } \emptyset \in \sigma(\mathscr{E}) \text{ und } f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \\
A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}, &\text{ da } A \in \sigma(\mathscr{E}) \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathscr{E}) \text{ und } f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \\
A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}, &\text{ da } A_1, A_2, \dots \in \sigma(\mathscr{E}) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \sigma(\mathscr{E}) \\
&\text{ und } f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})).
\end{aligned}$$

Nun gilt $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$ und damit $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{E})$. Somit folgt $f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$ für alle $A \in \sigma(\mathscr{E})$, also

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit kompakten Träger gilt, dass $\mu[f] = \nu[f]$. Hierbei definieren wir

$$\mu[f] := \int_\Omega f d\mu.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz A.16. und den Satz über monotone Konvergenz.

Lösung. Die eine Implikation ist klar. Wir müssen also zeigen, dass aus der Gleichheit der Integrale die Gleichheit der Maße folgt. Da μ und ν σ-endlich sind, reicht es nach dem Eindeutigkeitssatz A.16, zu zeigen, dass $\mu((a, b)) = \nu((a, b))$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, da $\{(a, b) \mid a, b \in$

$\mathbb{R}\}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin (a,b) \\ 1 & \text{für } x \in (a+1/n, b-1/n) \\ n(x-a) & \text{für } x \in (a, a+1/n] \\ -n(x-b) & \text{für } x \in [b-1/n, b). \end{cases}$$

Dann gilt $f_n(x) \leq \mathbb{1}_{(a,b)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$ für alle x. Außerdem ist f_n stetig, nicht-negativ und hat kompakten Träger ($\operatorname{supp} f_n = [a,b]$). Mit dem Satz über die monotone Konvergenz schließen wir nun

$$\mu((a,b)) = \mu[\mathbb{1}_{(a,b)}] = \mu[\lim_{n\to\infty} f_n] = \lim_{n\to\infty} \mu[f_n] = \lim_{n\to\infty} \nu[f_n] \overset{\text{rückwärts}}{=} \cdots = \nu((a,b)).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien λ, μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \varepsilon$ und $\nu(A^c) < \varepsilon$, dann ist $\mu \perp \nu$.

(b) Sind $\lambda \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, dann auch $\lambda \perp \nu$.

(c) Wenn $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, muss schon $\mu \equiv 0$.

Lösung. (a) Es sei $A_n \in \mathcal{A}$, sodass $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ und $\nu(A_n^c) \leq 2^{-n}$ für alle n. Dann ist

$$\mu(\limsup A_n) = \mu\Big(\bigcap_n \bigcup_{m\geq n} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{m\geq n} A_m\Big)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} \mu(A_m) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} 2^{-m} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n+1} = 0$$

und $$\nu\big((\limsup A_n)^c\big) = \nu\Big(\bigcup_n \bigcap_{m\geq n} A_m^c\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \underbrace{\nu\Big(\bigcap_{m\geq n} A_m^c\Big)}_{\leq 2^{-m} \text{ für alle } m} = 0.$$

(b) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$. Wegen $\lambda \ll \mu$ ist dann auch $\lambda(A) = 0$ und damit $\lambda \perp \nu$.

(c) Sei A wie in b), dann ist mit $\mu \ll \nu$ auch $\mu(A^c) = 0$ und abschließend $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = 0$.

Aufgabe 4 (Bonus 4 Punkte)**.** Es seien μ und ν zwei Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ν endlich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\nu \ll \mu$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ auch $\nu(A) \leq \varepsilon$.

Lösung.

(b) $\Rightarrow$ (a): Angenommen $\nu \not\ll \mu$. Dann gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0 < \varepsilon := \frac{1}{2}\nu(A)$. Damit gibt es zu A und ε kein solches δ und (b) kann nicht gelten.

(a) $\Rightarrow$ (b): Angenommen (b) gilt nicht. Dann existiert also ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ aber $\nu(A_n) > \varepsilon$. Wir setzen $A_\infty := \limsup_n A_n$ und erhalten dann analog zu Aufgabe 3(a), dass $\mu(A_\infty) = 0$. Allerdings gilt, da ν endlich ist, dass

$$\nu(A_\infty) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Weibull-verteilte Zufallsvariable, d.h. P^X hat bzgl. des Lebesgue-Maßes die Dichte $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}$ mit $\alpha, \beta > 0$.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = \max\{X, 1\}$ und die Lebesgue-Zerlegung von P^Y bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Lösung. Es ist

$$P(Y \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ P(X \leq x), & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x \alpha\beta y^{\beta-1}e^{-\alpha y^\beta}\, d\lambda(y) \\ &= [-e^{-\alpha y^\beta}]_0^x \\ &= 1 - e^{-\alpha x^\beta}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Für jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $A \subset (-\infty, 1)$ gilt $P^Y(A) = 0$. Falls $A \subset (1, \infty)$ ist, gilt $P^Y(A) = P^X(A)$. Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $1 \notin A$ gilt demnach

$$P^Y(A) = \int_A ce^{-cy}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(y)d\lambda(y).$$

Außerdem haben wir $P^Y(\{1\}) = 1 - e^{-c}$.

Zusammen gilt also $P^Y = \mu + \nu$ mit

$$d\mu = \alpha\beta(\cdot)^{\beta-1}e^{-\alpha(\cdot)^\beta}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(\cdot)d\lambda \qquad \text{und} \qquad \nu = (1 - e^{-\alpha})\delta_1.$$

Offensichtlich ist $\mu \ll \lambda$ und $\nu \perp \lambda$. Damit ist die Lebesguesche Zerlegung gefunden.