Wahrscheinlichkeitstheorie — Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 05.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Bonus 4 Punkte)**.** Sein Ω', Ω Mengen und $f \colon \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathscr{E}$ ein Mengensystem auf Ω. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})).$$

Hinweis: Wir benutzen folgende Notation: $f^{-1}(\mathscr{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathscr{A}\}$ *für ein Mengensystem* $\mathscr{A}$ *auf* Ω. *Für* " $\supseteq$ " *ist es hilfreich die Menge* $\mathscr{F} := \{A \in \sigma(\mathscr{E}) | f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))\}$ *zu betrachten. Zeigen Sie zunächst, dass* $\mathscr{F}$ *eine* σ*-Algebra ist.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit kompakten Träger gilt, dass $\mu[f] = \nu[f]$. Hierbei definieren wir

$$\mu[f] := \int_\Omega f d\mu.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz A.16. und den Satz über monotone Konvergenz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien λ, μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \varepsilon$ und $\nu(A^c) < \varepsilon$, dann ist $\mu \perp \nu$.

(b) Sind $\lambda \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, dann auch $\lambda \perp \nu$.

(c) Wenn $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, muss schon $\mu \equiv 0$.

Aufgabe 4 (Bonus 4 Punkte)**.** Es seien μ und ν zwei Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ν endlich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\nu \ll \mu$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ auch $\nu(A) \leq \varepsilon$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Weibull-verteilte Zufallsvariable, d.h. P^X hat bzgl. des Lebesgue-Maßes die Dichte $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}$ mit $\alpha, \beta > 0$.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = \max\{X, 1\}$ und die Lebesgue-Zerlegung von P^Y bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.