UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie **Sommersemester 2023**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, 28.04.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ heißt Verteilungsunktion. Ist μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt $F_\mu : x \mapsto \mu((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von μ.

Zeigen Sie: Die Abbildung $\mu \mapsto F_\mu$ ist eine Bijektion von der Menge der W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf die Menge der Verteilungsfunktionen.

Lösung. Siehe Satz 1.60 bzw. Beispiel 1.56 in [1] .

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Abbildung und sei $\mathcal{R}$ ein Ring bzw. Algebra bzw. σ-Algebra über Y. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{R}\}$$

ein Ring bzw. Algebra bzw. σ-Algebra über X ist.

Lösung.
1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$
2. $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$.
3. $A \cup B$ siehe 5.
4. Algebra: $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A} \Rightarrow Y \in \mathcal{B}$.
5. σ-Algebra: analog zu 2. mittels

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x \in f^{-1}(B_k) \Leftrightarrow x \in f^{-1}\big(\bigcup_n B_n\big).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $\sigma(f)$ die von f bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugte σ-Algebra. Bestimmen Sie alle $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung. Wir zeigen g ist $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar genau dann, wenn g $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar und symmetrisch ist:
Es gilt für $A \subset [0,\infty)$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dass $f^{-1}(A) = A \cup (-A)$, für $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sei g symmetrisch und $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar. Dann gilt $g^{-1}((a,b)) = A \cup (-A)$ für eine Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Damit ist g $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Sei nun g $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Dann ist g $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar, da f stetig und damit $\sigma(f) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Weiter gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass $g^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(A) = (A \cap [0,\infty)) \cup (-(A \cap [0,\infty)))$. Damit gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = y$ auch $g(-x) = y$ und g ist symmetrisch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei σ-Algebren auf einer Menge Ω. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} := \{C | C \in \mathscr{A} \vee C \in \mathscr{B}\}$ ist eine σ-Algebra.
2. $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} := \{C | C \in \mathscr{A} \wedge C \in \mathscr{B}\}$ ist eine σ-Algebra.

Lösung.
1. Für $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathscr{A} = \sigma(\{1\})$, $\mathscr{B} = \sigma(\{2\})$ ist

$$\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\} \not\ni \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}.$$

2. Es gilt $\Omega \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Ist $C \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, so ist $C \in \mathscr{A}$ und $C \in \mathscr{B}$. Damit gilt dies auch für C^c. Mit der selben Argumentation zeigt man die Abgeschlossenheit unter abzählbaren Vereinigungen.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Sei Ω eine endliche Menge, sei $|\Omega| \geq 4$ und gerade. Setze

$$\mathcal{D} := \{D \subset \Omega \mid \; |D| \in 2\mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist.

Lösung. Da $|\Omega|$ gerade ist, ist $\Omega \in \mathcal{D}$. Wenn $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subset B$, ist sicherlich auch $|B \setminus A| = |B| - |A|$ gerade und damit $B \setminus A \in \mathcal{D}$. Seien abschließend $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ eine aufsteigende Folge. Dann gilt, da $|\Omega| < \infty$, dass auch $|\bigcup_{k\geq 1} A_k| \leq |\Omega| < \infty$. Insbesondere muss ein n existieren, sodass $\bigcup_{k\geq 1} A_k = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_n \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ ist also ein Dynkin-System.

Allerdings ist Ω nicht $\cap$-stabil und damit keine σ-Algebra, denn: Da $|\Omega| \geq 4$ finden wir drei unterschiedliche $\omega_1, \ldots, \omega_3 \in \Omega$. Dann ist $\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{D}$, $\{\omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{D}$ aber nicht $\{\omega_1, \omega_2\} \cap \{\omega_2, \omega_3\} = \{\omega_2\}$.

Aufgabe 6 (Bonus 4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{R} \subset 2^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ ist ein Ring im Sinne der Algebra.

(b) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A\Delta B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

(c) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A\Delta B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(d) $\mathcal{R}$ ist ein Ring im Sinne der Maßtheorie.

Hinweis: Dabei ist $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *die symmetrische Differenz.*

Lösung. Vorüberlegung:
Sind A und B disjunkt, so gilt $A\triangle B = A \cup B$.
Gilt $A \supset B$, so ist $A\triangle B = A \setminus B$.
$\triangle$ ist assoziativ.

Zur Lösung:
Man zeige $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

- $(a) \Rightarrow (b)$:
  Algebraische Ringe sind unter beiden Operatoren abgeschlossen. Außerdem ist zum ersten Operator ein neutrales Element vorhanden. Dieses ist hier die leere Menge.
- $(b) \Rightarrow (c)$:
  $A \cup B = (A\triangle B)\triangle(A \cap B)$. (disjunkte Vereinigung)
- $(c) \Rightarrow (d)$:
  $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = (A \cup B)\triangle B$.
- $(d) \Rightarrow (a)$:
  Der maßtheoretische Ring ist abgeschlossen unter $\setminus$ und $\cup$, also auch unter $\triangle$ und somit unter $\cap$, da nach Vorüberlegung

  $$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\triangle B) = (A\triangle B)\triangle(A \cup B).$$

  Außerdem enthält er nach Definition $\emptyset$, das neutrale Element von $\triangle$. Da $\triangle$ symmetrisch ist und jede Menge bezüglich $\triangle$ selbstinvers, bleiben nur noch die Assoziativ- und die Distributivgesetze zu zeigen:

  $(A \cap B)\triangle(A \cap C) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) = A \cap (B\triangle C)$,

  $A\triangle(B \cap C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C \cap A^c) = (A\triangle B) \cap (A\triangle C)$.

  Die Assoziativität von $\cap$ ist klar.

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.