Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 14.07.2023, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ für alle $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Lösung. $E[X]$ ist konstant und damit messbar bzgl. $\mathscr{A}$. Weiter gilt

$$E[X\mathbb{1}_\Omega] = E[X] = E[E[X]] = E[E[X]\mathbb{1}_\Omega]$$
$$E[X\mathbb{1}_\emptyset] = 0 = E[E[X]\mathbb{1}_\emptyset].$$

Die Aussage folgt mit Definition 162.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

i) Ist $(X_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar und $(\mathscr{F}_j)_{j\in J}$ eine Famile von Unter-σ-Algebren von $\mathscr{A}$. Dann ist die Familie $(E[X_i|\mathscr{F}_j])_{i\in I, j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

ii) Ist $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$, dann ist $(E[X|\mathscr{F}_j])_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

iii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in $i)$ im Allgemeinen falsch ist.

Lösung. $i)$ [1, Korollar 8.22]
$ii)$ Folgt mit $i)$, da eine L^1 Zufallsvariable gleichgradig integrierbar ist.
$iii)$ Der Wahrscheinlichkeitsraum ist gegeben durch $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$. Die Zufallsvariablen $X_i := i1_{[0,1/i]}$ für $i \in \mathbb{N}$ bilden eine Familie von nicht gleichgradig integrierbaren Zufallsvariablen. Betrachten wir beispielsweise $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathscr{A}$, so gilt $E[X_i|\mathscr{F}] \equiv 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und bildet damit eine gleichgradig integrierbare Famile von Zufallsvariablen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Auf einer Ebene bilden Geraden im horizontalen und vertikalen Abstand 1 ein Schachbrettmuster. Es werden Nadeln der Länge 1 rein zufällig auf die Ebene geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene Nadel keine der Geraden schneidet?
Hinweis: Definieren Sie die Zufallsvariable Z durch

$$Z = \begin{cases} 1, & \textit{falls die Nadel eine Gerade schneidet,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei der Mittelpunkt der Nadel X von der linken Geraden und Y von der unteren Geraden entfernt und die Verlängerung der Nadel geht einen spitzen Winkel Θ mit der linken Gerade ein. Dann sind X und Y uniform auf $[0,1]$ verteilt und Θ uniform auf $[0,\pi/2]$, wobei X, Y, Θ unabhängig sind.

Lösung. Wir definieren die Zufallsvariable Z durch

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{falls die Nadel eine Gerade schneidet,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun sei der Mittelpunkt der Nadel X von der linken Geraden und Y von der unteren Geraden entfernt und die Verlängerung der Nadel geht einen spitzen Winkel Θ mit der linken Gerade ein. Dann sind X und Y uniform auf $[0,1]$ verteilt und Θ uniform auf $[0,\pi/2]$, wobei X,Y,Θ unabhängig sind. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&P[Z=1|\Theta]\\
&= P\Big(\{X \le \frac{\sin(\Theta)}{2}\} \,\cup\, \{X \ge 1-\frac{\sin(\Theta)}{2}\} \,\cup\, \{Y \le \frac{\cos(\Theta)}{2}\} \,\cup\, \{Y \ge 1-\frac{\cos(\Theta)}{2}\}|\Theta\Big)\\
&= P\Big(X \notin (\frac{\sin(\Theta)}{2}, 1-\frac{\sin(\Theta)}{2}) \vee Y \notin (\frac{\cos(\Theta)}{2}, 1-\frac{\cos(\Theta)}{2})|\Theta\Big)\\
&= 1-P\Big(X \in (\frac{\sin(\Theta)}{2}, 1-\frac{\sin(\Theta)}{2}), Y \in (\frac{\cos(\Theta)}{2}, 1-\frac{\cos(\Theta)}{2})|\Theta\Big)\\
&= 1-P\Big(X \in (\frac{\sin(\Theta)}{2}, 1-\frac{\sin(\Theta)}{2}|\Theta)\Big)P\Big(Y \in (\frac{\cos(\Theta)}{2}, 1-\frac{\cos(\Theta)}{2})|\Theta\Big)\\
&= 1-(1-\sin(\Theta))(1-\cos(\Theta))\\
&= \cos(\Theta)+\sin(\Theta)-\sin(\Theta)\cos(\Theta).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$P[Z=1] = E[P[Z=1|\Theta]] = E[\cos(\Theta)+\sin(\Theta)-\sin(\Theta)\cos(\Theta)] = \frac{2}{\pi}(1+1-0.5) = \frac{3}{\pi}$$

und es folgt

$$P[Z=0] = \frac{\pi-3}{\pi}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Finden sie ein Beispiel für eine Zufallsvariable X und σ-Algebren $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$, sodass

$$E[E[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}] \neq E[E[X|\mathscr{G}]|\mathscr{F}].$$

Lösung. Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und X uniform verteilt auf Ω. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}\,,\\
\mathscr{G} &= \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}
\end{aligned}$$

Die bedingte Erwartung $E[X|\mathscr{F}]$ ist eine reellwertige $\mathscr{F}$-messbare Zufallsvariable, hat also die Form

$$C_1\mathbb{1}_{\{1\}}(\omega) + C_2\mathbb{1}_{\{2,3\}}(\omega)$$

für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Nach der definierenden Eigenschaft der bedingten Erwartung muss gelten:

$$\begin{aligned}
E[X\mathbb{1}_{\{1\}}] &= E[E[X|\mathscr{F}]\mathbb{1}_{\{1\}}] = E[C_1\mathbb{1}_{\{1\}}],\\
E[X\mathbb{1}_{\{2,3\}}] &= E[E[X|\mathscr{F}]\mathbb{1}_{\{2,3\}}] = E[C_2\mathbb{1}_{\{2,3\}}].
\end{aligned}$$

Wir erhalten $C_1 = 1, C_2 = 2,5$. Die Zufallsvariable $E[E[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}]$ hat die Form

$$D_1\mathbb{1}_{\{1,2\}}(\omega) + D_2\mathbb{1}_{\{3\}}(\omega).$$

Mit der definierenden Eigenschaft der bedingten Erwartung erhalten wir $D_1 = 1.75, D_2 = 2.5$ und somit

$$E[E[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}](\omega) = 1.75\,\mathbb{1}_{\{1,2\}}(\omega) + 2.5\,\mathbb{1}_{\{3\}}(\omega).$$

Analog erhalten wir

$$E[E[X|\mathscr{G}]|\mathscr{F}](\omega) = 1.5\,\mathbb{1}_{\{1\}}(\omega) + 2.25\,\mathbb{1}_{\{2,3\}}(\omega).$$

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.