Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

# Stochastische partielle Differentialgleichungen

Angelika Rohde

Sommersemester 2023

## Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

**Beispiel 1.1** (Motivation)**.** *Betrachte ein System von $N = 1/h$ interagierenden Teilchen in (geordneten) Positionen $u_i \in [0,1]$, deren zeitliche Entwicklung vom Zeitpunkt $t$ zu $t+\Delta$ näherungsweise wie folgt beschrieben werden kann:*

$$X_{t+\Delta}(u_i) - X_t(u_i) \\ \approx \Big( \frac{X_t(u_{i-1}) - 2X_t(u_i) + X_t(u_{i+1})}{h^2} + f\big(X_t(u_i)\big) \Big) \Delta + \sqrt{h} b\big(X_t(u_i)\big) \underbrace{\big(W^i_{t+\Delta} - W^i_t\big)}_{\sim \mathcal{N}(0,\Delta)},$$

*$i = 1, \ldots, N$, mit unabhängigen Brownschen Bewegungen $W^1, \ldots, W^N$. $b$ modelliert hierbei die Intensität einer externen zufälligen Kraft.*

*$\longrightarrow$ Grenzübergang (in geeignetem Sinne) $\Delta \to 0$:*

$$dX_t(u_i) = \Big( \frac{X_t(u_{i-1}) - 2X_t(u_i) + X_t(u_{i+1})}{h^2} + f\big(X_t(u_i)\big) \Big) dt + \sqrt{h} b\big(X_t(u_i)\big) dW^i_t, \tag{1.1}$$

*$i = 1, \ldots, N$. Schreibt man die $N$ Komponenten aus (1.1) in einen Vektor, erhält man eine klassische $N$-dimensionale stochastische Differentialgleichung (SDE).*

*Integralschreibweise von (1.1):*

$$X_t(u_i) = X_0(u_i) + \underbrace{\int_0^t \Big( \frac{X_s(u_{i-1}) - 2X_s(u_i) + X_s(u_{i+1})}{h^2} + f\big(X_s(u_i)\big) \Big) ds}_{\text{klassisches Integral mit zufälligem Integranden}} \\ + \underbrace{\int_0^t \sqrt{h} b\big(X_s(u_i)\big) dW^i_s}_{\text{stochastisches Integral}}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

*Nun kann man aber auch einen Grenzübergang (in geeignetem Sinne) $h \to 0$ (d.h. $N = 1/h \to \infty$) des Systems (1.1) betrachten. Wegen*

$$\frac{X_t(u_{i-1}) - 2X_t(u_i) + X_t(u_{i+1})}{h^2} = \frac{\frac{X_t(u_{i+1}) - X_t(u_i)}{h} - \frac{X_t(u_i) - X_t(u_{i-1})}{h}}{h}$$

*legt dies rein formal eine Approximation folgender Gestalt nahe:*

$$dX_t(u) = \Big( \Delta_u X_t(u) + f\big(X_t(u)\big) \Big) dt + b\big(X_t(u)\big) dW_t(u), \quad u \in [0,1].$$

*Für jedes $t \geq 0$ ist $X_t = (X_t(u))_{u \in [0,1]}$ eine (zufällige) Funktion auf $[0,1]$; eine Lösung $(X_t)_{t \geq 0}$ dieser stochastischen partiellen Differentialgleichung (in geeignetem Sinne) ist ein funktionswertiger stochastischer Prozess. Entsprechend ist $(W_t)_{t \geq 0}$ dann eine sogenannte zylindrische Brownsche Bewegung (auf $L_2[0,1]$) $\to$ Definition später.*

Gegenstand dieser Vorlesung ist die mathematische Theorie stochastischer partieller Differentialgleichungen (SPDEs) der allgemeinen Form

$$dX_t \;=\; A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t \tag{1.2}$$

Hierbei sind $X$, $A$ Prozesse mit Werten in einem Banachraum und $W$ eine Brownsche Bewegung auf einem Hilbertraum. Entsprechend nimmt $B$ Werte im Raum linearer Operatoren von dem Hilbertraum in den Banachraum an.

Formale Integralschreibweise von (1.2):

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t A(s, X_s)ds}_{\substack{\text{Banachraum-wertiger Integrand} \\ \to \text{ Integral muss definiert werden}}} + \underbrace{\int_0^t B(s, X_s)dW_s}_{\substack{\text{stochastisches Integral mit BB in einem Hilbertraum} \\ \to \text{ muss auch definiert werden}}}.$$

Dazu benötigen wir

- ein Integral mit Banachraum-wertigen Integranden,
- das Konzept Hilbertraum-wertiger Brownscher Bewegungen,
- das entsprechende stochastische Integral in unendlicher Dimension,
- (einen) geeignete(n) Lösungsbegriff(e) von (1.2),
- Bedingungen an $A$ und $B$, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen garantieren.

# 2. Banachraum-wertige $\mathrm{L_p}$-Räume und das Bochner-Integral

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mu$ ein endliches Maß darauf, $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum. Nachfolgend sind alle Banachräume als solche über dem Körper $\mathbb{R}$ zu verstehen.

## 2.1. Bochner-Messbarkeit und Banachraum-wertige $\mathrm{L_p}$-Räume

$$\begin{aligned} F(B) \;&:= \text{Raum der messbaren } B\text{-Treppenfunktionen} \\ &= \Big\{ f : \Omega \to B : \text{ Es existieren } n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots A_N \in \mathcal{A},\ b_1, \ldots, b_N \in B \\ &\qquad\qquad \text{mit } f(\omega) = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k}(\omega) b_k \ \forall \omega \in \Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Ziel ist es, ein Integral $\int f d\mu$ zu definieren für eine (möglichst) große Klasse von Funktionen $f : \Omega \to B$.

**Definition 2.1.** *Eine Funktion $f : \Omega \to B$ heißt Bochner-messbar, falls eine Folge $(f_n)$ aus $F(B)$ existiert, so dass $f_n(\omega) \to f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.*

**Bemerkung 2.2.** *Ist $f : \Omega \to B$ Bochner-messbar, so ist die Abbildung $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_B$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Denn $\|f_n(\omega) - f(\omega)\|_B \to 0$ $\forall \omega \in \Omega$ mit $f_n \in F(B)$ impliziert $\|f_n(\omega)\|_B \to \|f(\omega)\|_B$ $\forall \omega \in \Omega$, und die Abbildungen $\omega \mapsto \|f_n(\omega)\|_B$ sind $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Als punktweiser Grenzwert $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbarer Funktionen ist $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_B$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.*

Seien

$$\begin{aligned} L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B) &= \text{Menge der Äquivalenzklassen (modulo Gleichheit fast überall)} \\ &\quad\ \text{von Bochner-messbaren Funktionen,} \end{aligned}$$

und

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B) := \begin{cases} \left\{ f \in L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B) : \int \|f\|_B^p d\mu < \infty \right\} & \text{falls } 1 \leq p < \infty \\ \\ \left\{ f \in L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B) : \text{ess sup } \|f(.)\|_B < \infty \right\} & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Hierbei ist wie üblich

$$\text{ess sup } \|f(.)\|_B := \inf_{\substack{N \in \mathcal{A}: \\ \mu(N)=0}} \sup_{\omega \in N^c} \|f(\omega)\|_B.$$

**Lemma 2.3.** *Auf $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B)$ definiert*

$$\|f\|_{L_p(B)} = \begin{cases} \left( \int \|f\|_B^p d\mu \right)^{1/p} & \textit{falls } 1 \leq p < \infty \\ \\ \textit{ess sup } \|f(.)\|_B & \textit{falls } p = \infty \end{cases}$$

*eine Norm und die normierten Räume $(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B), \|\cdot\|_{L_p(B)})$ sind Banachräume.*

Ein zentrales Hilfsmittel für den Beweis des Lemmas ist der nachfolgende

Satz von Egorov: Sei $M$ ein normierter Raum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $(g_n)$ eine Folge von (Borel-)messbaren $M$-wertigen Funktionen mit $g_n \to 0$ $\mu$-f.s. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass

$$\sup_{\omega \in A_\varepsilon^c} \|g_n(\omega)\|_M \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

(Beweis Aufgabe 1(i), Übungsblatt 1)

*Beweis von Lemma 2.3.* Offenbar sind Summe und skalare Vielfache Bochner-messbarer Funktionen wieder Bochner-messbar. Der Nachweis der Normeigenschaft folgt wie bei klassischen $L_p$-Räumen. Bleibt die Vollständigkeit zu zeigen.

Fall $p < \infty$: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{L_p(B)}$-Cauchyfolge. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L_p(B)} < \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit

$$g_k(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}}(\omega) - f_{n_j}(\omega)\|_B \quad \text{und}$$

$$g(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}}(\omega) - f_{n_j}(\omega)\|_B, \quad \omega \in \Omega,$$

folgt aus der Minkowski-Ungleichung für die klassischen $L_p$-Räume und dem Lemma von Fatou, dass $\|g\|_{L_p} \leq 1$ und damit $|g(\omega)| < \infty$ für alle $\omega$ außerhalb einer $\mu$-Nullmenge $N$. Für diese $\omega$ ist die Reihe

$$f_{n_1}(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \big(f_{n_{j+1}}(\omega) - f_{n_j}(\omega)\big)$$

normal konvergent und damit konvergent gegen ein $f(\omega)$ in $B$. Auf $N$ definieren wir $f(\omega) = 0$. Wegen

$$f_{n_1}(\omega) + \sum_{j=1}^{k} \big(f_{n_{j+1}}(\omega) - f_{n_j}(\omega)\big) = f_{n_{k+1}}(\omega)$$

gilt $f(\omega) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega)\ \forall \omega \in N^c$. Wir zeigen nun erstmal, dass eine Modifikation von $f$ auf einer $\mu$-Nullmenge Bochner-messbar ist. Dazu sei $(f_{n_k,m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $F(B)$, welche $f_{n_k}$ punktweise (in $\omega$) approximiert. Sei $\varepsilon_l \searrow 0$ eine Nullfolge. Nach dem Satz von Egorov – angewendet auf $g_k = \|f_{n_k} - f\|_B$ bzw. $g_m = \|f_{n_k,m} - f_{n_k}\|_B$ – existieren (ohne Einschränkung absteigende) Folgen $(A_l)$ und $(B_l)$ messbarer Mengen $A_l, B_l \in \mathcal{A}$ und $k(l), m(l) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_l) < \varepsilon_l$, $\mu(B_l) < \varepsilon_l$,

$$\sup_{\omega\in A_l^c} \|f_{n_{k(l)}}(\omega) - f(\omega)\|_B < \varepsilon_l \quad \text{und} \qquad \sup_{\omega\in B_l^c} \|f_{n_{k(l)},m(l)}(\omega) - f_{n_{k(l)}}(\omega)\|_B < \varepsilon_l,$$

also

$$\sup_{\omega\in(A_l\cup B_l)^c} \|f_{n_{k(l),m(l)}}(\omega) - f(\omega)\|_B < 2\varepsilon_l.$$

Weiter ist $\mu(\cap_{l\in\mathbb{N}}(A_l \cup B_l)) = 0$ (Stetigkeit von oben). Es folgt mit $M = \cap_{l\in\mathbb{N}}(A_l \cup B_l)$

$$\mathbb{1}_{M^c} f_{n_{k(l),m(l)}}(\omega) \to \mathbb{1}_{M^c} f(\omega)\ \forall \omega \in \Omega,$$

also die Bochner-Messbarkeit von $\tilde{f} = \mathbb{1}_{M^c} f$. Bleibt zu zeigen, dass $\|f_n - \tilde{f}\|_{L_p(B)} \to 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_m - f_n\|_{L_p(B)} < \varepsilon\ \forall\ m, n \geq n_0.$$

Aus dem Lemma von Fatou und $\mu(M) = 0$ folgt für $n \geq n_0$

$$\int_\Omega \|f_n - \tilde{f}\|_B^p d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f_{n_k}\|_B^p d\mu \leq \varepsilon^p,$$

also $\|f_n - \tilde{f}\|_{L_p(B)} \leq \varepsilon$.

<u>Fall $p = \infty$</u>: Aufgabe 1(ii) auf Übungsblatt 1. $\square$

Natürlich stimmt im Falle $B = \mathbb{R}$ die Definition der $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B)$-Räume mit der der üblichen $L_p(\mu)$-Räume überein. Falls kein Verwechslungsrisiko besteht, schreiben wir nachfolgend kurz $L_p(B)$ für $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B)$. Für $\phi_1, \dots, \phi_N \in L_p(\mu)$ und $b_1, \dots, b_N \in B$ ist

$$f(.) = \sum_{k=1}^{N} \phi_k(.) b_k \in L_p(B). \tag{2.1}$$

Diese Funktion bezeichnen wir mit $\sum_{k=1}^{N} \phi_k \otimes b_k$ und mit $L_p(\mu) \otimes B$ den Teilraum von $L_p(B)$, der aus Funktionen dieser Gestalt besteht.

**Proposition 2.4.** *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gelten:*

*(i) $F(B) \cap L_p(B)$ ist dicht in $L_p(B)$.*

*(ii) Der Teilraum $L_p(\mu) \otimes B \subset L_p(B)$ ist dicht in $L_p(B)$.*

*Beweis.* Seien $f \in L_p(B)$ und $f_n \in F(B)$ mit $f_n \to f$ punktweise. Dann gilt auch $\|f_n(.)\|_B \to \|f(.)\|_B$ punktweise. Mit $g_n = f_n \mathbb{1}_{\{\|f_n\|_B < 2\|f\|_B\}}$ gilt ebenfalls $g_n \to f$ punktweise, $g_n \in F(B) \cap L_p(B)$ und zusätzlich

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n - f\|_B \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_B + \|f\|_B \leq 3\|f\|_B.$$

Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt $\int \|g_n - f\|_B^p d\mu \to 0$, also Aussage (i). Die Aussage (ii) folgt dann unmittelbar, weil $F(B) \cap L_p(B) \subset L_p(\mu) \otimes B$ ist. □

**Bemerkung 2.5.** *($\to$ Aufgabe 2, Übungsblatt 1) Falls $B$ endlichdimensional ist, liegt $F(B)$ dicht in $L_\infty(B)$. Allerdings ist das für unendlichdimensionales $B$ nicht mehr korrekt, da die Einheitskugel von $B$ dann nicht kompakt ist.*

## 2.2. Das Bochner-Integral

Wir wenden uns nun der Definition des Integrals einer Funktion $f \in L_1(B)$ zu. Zunächst definieren wir für $f = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{A_k} \otimes b_k \in F(B) \cap L_1(B)$

$$\int f d\mu := \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) b_k.$$

Offenbar ist die rechte Seite unabhängig von der Darstellung von $f$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} F(B) \cap L_1(B) &\longrightarrow B \\ f &\longmapsto \int f d\mu \end{aligned} \tag{2.2}$$

ist linear und stetig – die Beschränktheit folgt (für eine Darstellung $f = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{A_k} \otimes b_k$ mit paarweise disjunkten $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$) aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int f d\mu \right\|_B \leq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) \|b_k\|_B = \|f\|_{L_1(B)}. \tag{2.3}$$

Da der lineare Teilraum $F(B) \cap L_1(B)$ in $L_1(B)$ nach Proposition 2.4 dicht liegt, lässt sich Abbildung (2.2) nach dem Fortsetzungssatz (gleichmäßig stetiger Abbildungen in Banachräume) eindeutig zu einer stetigen und linearen Abbildung auf $L_1(B)$ fortsetzen.

**Definition 2.6.** *Die eindeutige stetige lineare Fortsetzung von (2.2) auf $L_1(B)$ heißt Bochner-Integral. Wir bezeichnen sie gleichermaßen mit $\int f d\mu$ für $f \in L_1(B)$.*

**Bemerkung 2.7.** *Für das Bochner-Integral gilt die Jensen-Ungleichung (in diesem Kontext auch Bochner-Ungleichung genannt)*

$$\left\| \int f d\mu \right\|_B \leq \int \|f\|_B d\mu = \|f\|_{L_1(B)} \quad \forall\ f \in L_1(B),$$

*denn für $f \in F(B) \cap L_1(B)$ ist das gerade die Ungleichung (2.3).*

**Lemma 2.8** (Dominierte Konvergenz für das Bochner-Integral)**.** *Seien $f_n : \Omega \to B$, $n \in \mathbb{N}$, Bochner-messbar. Angenommen, $f_n \to f$ $\mu$-f.s. für ein $f : \Omega \to B$. Dann gelten:*

*(i) $f \in L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu; B)$;*

*(ii) Falls $\|f_n\| \leq g \in L_1(\mu)$, so folgt $f \in L_1(B)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

*Beweis.* Aussage (i) folgt mithilfe des Satzes von Egorov wie im Beweis von Lemma 2.3. Gilt $\|f_n\|_B \leq g \in L_1(\mu)$, so ergibt sich aus dem Satz von der dominierten Konvergenz $\int \|f_n - f\|_B d\mu \to 0$. Die Aussage (ii) folgt dann aus Bemerkung 2.7. □

Wir formulieren für spätere Zwecke noch folgende Identität, die sich gleichermaßen von $F(B) \cap L_1(B)$ aus Stetigkeitsgründen fortsetzt:

**Lemma 2.9.** *Ist für Banachräume $B_1, B_2$ die Abbildung $T : B_1 \to B_2$ linear und beschränkt, so impliziert $f \in L_1(B_1)$, dass $T \circ f \in L_1(B_2)$ und es gilt $T(\int f d\mu) = \int T \circ f d\mu$.*

*Beweis.* Übungslatt 2, Aufgabe 4(i). □

Wenngleich eine Bochner-messbare Funktion immer $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(B)$-messbar ist (Übungsblatt 1, Aufgabe 3), ist eine Borel-messbare $B$-wertige Funktion nicht notwendig als fast-sicher-Grenzwert einer Folge von $B$-Treppenfunktionen darstellbar. Das Bochner-Integral ist daher nicht in Analogie zum gewöhnlichen Maßintegral allgemein für Borel-messbare Banachraum-wertige Funktionen definiert. Im Falle eines separablen Banachraums besitzt aber jede messbare Funktion einer Bochner-messbare Modifikation:

**Lemma 2.10.** *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $(B, \|.\|_B)$ ein separabler Banachraum und $f : \Omega \to B$ messbar. Dann ist $f \in L_0(B)$.*

*Beweis.* Da das Bildmaß $\mu^f$ als endliches Maß auf einem polnischen Raum nach dem Satz von Ulam straff ist, existiert eine aufsteigende Folge $(K_n)$ kompakter Mengen aus $B$ mit $\mu^f(K_n^c) \leq 1/n$. Weil $K_n$ als kompakte Menge insbesondere totalbeschränkt ist, existiert eine endliche Partition $B_{n,1}, \ldots B_{n,m_n} \in \mathcal{B}(B)$ von $K_n$ mit $\sup_{b,b' \in B_{n,i}} \|b - b'\|_B \leq 1/n$, $i = 1, \ldots, m_n$. Wählt man jeweils ein $b_{n,i} \in B_{n,i}$ und definiert $f_n := \sum_{i=1}^{m_n} \mathbb{1}_{f^{-1}(B_{n,i})} b_{n,i}$, so ist $(f_n)$ eine Folge messbarer $B$-Treppenfunktionen mit $f_n \to f$ $\mu$-f.s. □

# 3. Gaußsche Maße auf Banachräumen

Für einen Banachraum $B$ bezeichnet wie üblich $B^*$ seinen topologischen Dualraum.

## 3.1. Charakterisierung durch Bildmaße unter stetigen Linearformen

Nach dem Cramér-Wold device ist ein gaußsches Maß auf $\mathbb{R}^n$ dadurch charakterisiert, dass sämtliche Projektionen des Maßes auf eindimensionale Teilräume wieder gaußisch sind. Diese Eigenschaft lässt sich leicht auf unendlichdimensionale Räume verallgemeinern.

**Definition 3.1.** *Ein gaußsches W-Maß $\mu$ auf einem separablen Banachraum $B$ ist ein W-Maß auf $\mathcal{B}(B)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\ell \in B^*$ ist $\mu^\ell$ gaußsch.*

Dabei werden Dirac-Maße als Gaußmaße mit Varianz 0 aufgefasst. Natürlich stellt sich unmittelbar die Frage, ob ein W-Maß auf $B$ überhaupt eindeutig durch alle seine Bildmaße $\mu^\ell$ mit $\ell \in B^*$ charakterisiert ist.

**Proposition 3.2.** *Seien $B$ ein separabler Banachraum, $\mu$ und $\nu$ W-Maße auf $\mathcal{B}(B)$. Gilt $\mu^\ell = \nu^\ell$ für alle $\ell \in B^*$, so folgt $\mu = \nu$.*

Für den Beweis verwenden wir folgende einfache Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach:

**Lemma 3.3.** *Ist $B$ separabel, so existiert eine Folge $(\ell_n)$ aus $B^*$, so dass gilt:*

$$\|b\|_B = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\ell_n(b)| \quad \textit{für alle } b \in B.$$

*Beweis:* Aufgabe 1, Übungsblatt 2.

*Beweis von Proposition 3.2.* Da alle $\ell \in B^*$ als stetige Funktionen $\mathcal{B}(B)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sind, ist das $\cap$-stabile System aller Zylindermengen

$$\mathcal{Z} := \Big\{ \big\{ b \in B : \ (\ell_1(b), \dots, \ell_n(b))' \in A \big\}, \ \ell_1, \dots, \ell_n \in B^*, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

in $\mathcal{B}(B)$ enthalten. Nun sind aber W-Maße auf $\mathbb{R}^n$ bereits eindeutig durch sämtliche Projektionen $\pi$ auf eindimensionale Teilräume charakterisiert. Da für $\ell_1, \dots, \ell_n \in B^*$ die Komposition $\pi \circ (\ell_1, \dots, \ell_n)'$ von der Gestalt $v\langle v, (\ell_1, \dots, \ell_n)'\rangle$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und $\langle v, (\ell_1, \dots, \ell_n)'\rangle \in B^*$ ist und die Bildmaße von $\mu$ und $\nu$ unter $\langle v, (\ell_1, \dots, \ell_n)'\rangle$ nach Voraussetzung übereinstimmen, stimmen sie auch auf $\mathcal{Z}$ überein. Somit reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{B}(B)$ von $\mathcal{Z}$ erzeugt wird. Wir weisen nach, dass bereits $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{Z}$ mit

$$\mathcal{E}_0 = \Big\{ \big\{ b \in B : \ \ell(b) \le \alpha \big\}, \ \ell \in B^*, \ \alpha \in \mathbb{R} \Big\}$$

die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(B)$ erzeugt. Nach obigem Lemma existiert eine Folge $(\ell_n)$ aus $B^*$ mit $\|b\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\ell_n(b)|$ für alle $b \in B$. Für die offene Kugel $U(b_0, r)$ um $b_0 \in B$ vom

Radius $r$ folgt damit

$$\begin{aligned} U(b_0, r) &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{U(b_0, r(1-1/m))} \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{ b \in B : \; |\ell_n(b - b_0)| \le r(1-1/m) \big\} \in \sigma(\mathcal{E}_0). \end{aligned}$$

Schließlich kann jede offene Menge in einem separablen Banachraum als abzählbare Vereinigung offener Kugeln dargestellt werden, womit $\mathcal{B}(B) \subset \sigma(\mathcal{E}_0)$. $\square$

**Bemerkung 3.4.** *Ähnlich zeigt man Aufgabe 2 auf Übungsblatt 2: Seien $B$ ein separabler Banachraum und $X$ und $Y$ zwei $B$-wertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ist $\mathbb{P}^{(\ell_1(X), \ell_2(Y))} = \mathbb{P}^{\ell_1(X)} \otimes \mathbb{P}^{\ell_2(Y)}$ $\forall\, \ell_1, \ell_2 \in B^*$, so sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig.*

**Definition 3.5.** *Ein $W$-Maß auf $(B, \mathcal{B}(B))$ heißt zentriert, falls $\forall\, \ell \in B^*$ die die Bildmaße $\mu^\ell$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ zentriert sind. Es heißt symmetrisch, falls $\forall\, \ell \in B^*$ gilt $\mu^\ell = \mu^{-\ell}$.*

## 3.2. Der Satz von Fernique

**Lemma 3.6.** *Sei $B$ ein separabler Banachraum. Seien $X$ und $Y$ unabhängig und identisch verteilte zentrierte Gaußvariablen in $B$. Dann sind $\tilde{X} = (X+Y)/\sqrt{2}$ und $\tilde{Y} = (X-Y)/\sqrt{2}$ ebenfalls unabhängig und haben dieselbe Verteilung wie $X$.*

*Beweis.* Einerseits ist für alle $\ell_1, \ell_2 \in B^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\ell_1(\tilde{X})\ell_2(\tilde{Y})\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\big(\ell_1(X) + \ell_1(Y)\big)\big(\ell_2(X) - \ell_2(Y)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}\big(\ell_1(Y)\ell_2(X)\big) - \mathbb{E}\big(\ell_1(X)\ell_2(Y)\big)\Big) = 0, \end{aligned}$$

was zusammen mit Bemerkung 3.4 die Unabhängigkeit belegt, denn zwei gemeinsam normalverteilte reellwertige Zufallsvariablen sind unabhängig genau dann, wenn sie unkorreliert sind. Andererseits gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\ell \in B^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp\Big(i\lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\ell(X \pm Y)\Big) &= \mathbb{E}\exp\Big(i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\ell(X)\Big)\mathbb{E}\exp\Big(i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\ell(\pm Y)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{\lambda^2}{4}\mathbb{E}\big(\ell(X)^2\big)\Big)\Big(\frac{\lambda^2}{4}\mathbb{E}\big(\ell(Y)^2\big)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}\big(\ell(X)^2\big)\Big), \end{aligned}$$

d.h. für jedes $\ell \in B^*$ ist die charakteristische Funktion von $\ell(\tilde{X})$ bzw. $\ell(\tilde{Y})$ die der $\mathcal{N}\big(0, \mathbb{E}\big(\ell(X)^2\big)\big)$-Verteilung. Nach Proposition 3.2 stimmt damit die Verteilung von $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ mit der von $(X, Y)$ überein. $\square$

Das nachfolgende fundamentale Resultat besagt, dass die Norm einer Banachraum-wertigen gaußschen Zufallsvariable immer – genau wie im endlichdimensionalen Fall – subgaußsche Tails besitzt. Insbesondere ist die Abbildung $x \mapsto \|x\|_B^2$ integrierbar.

**Satz 3.7** (Fernique 1970). *Sei $\mu$ ein zentriertes Gaußmaß auf einem separablen Banachraum $B$. Dann existiert ein $\beta > 0$, so dass*

$$\int_B \exp\left(\beta \|b\|_B^2\right) d\mu(b) \ < \ \infty.$$

*Beweis.* Seien $0 < s \leq t$. Dann ist nach Lemma 3.6

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\|X\|_B \leq s\big)\mathbb{P}\big(\|Y\|_B > t\big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\|X-Y\|_B \leq s\Big)\mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\|X+Y\|_B > t\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\|X-Y\|_B \leq s \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}}\|X+Y\|_B > t\Big).\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\min\big(\|x\|_B, \|y\|_B\big) \geq \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|_B - \|x-y\|_B\Big) \quad \forall, x, y \in B,$$

und damit die Inklusion

$$\begin{aligned}&\big\{(x,y) \in B \times B : \ \|x-y\|_B \leq \sqrt{2}s, \ \|x+y\|_B > \sqrt{2}t\big\} \\ &\qquad \subset \Big\{(x,y) \in B \times B : \ \|x\|_B > \frac{t-s}{\sqrt{2}}, \ \|y\|_B > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\Big\}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\|X\|_B \leq s\big)\mathbb{P}\big(\|Y\|_B > t\big) &\leq \mathbb{P}\Big(\|X\|_B > \frac{t-s}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \|Y\|_B > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\Big) \\ &= \Big[\mathbb{P}\Big(\|X\|_B > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\Big)\Big]^2. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Wähle ein $r > 0$ mit $\mathbb{P}(\|X\|_B \leq r) \geq 2/3$. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(t_n)$ durch $t_0 = r$ und $t_{n+1} = r + \sqrt{2}t_n$ für $n \geq 1$. Setze

$$\alpha_n = \frac{\mathbb{P}(\|X\|_B > t_n)}{\mathbb{P}(\|X\|_B \leq r)} \quad \text{für } n \geq 0.$$

Ungleichung (3.1) mit $s = r$ und $t = t_n$ ergibt

$$\alpha_{n+1} = \frac{\mathbb{P}(\|X\|_B > t_n)}{\mathbb{P}(\|X\|_B \leq r)} \leq \left[\frac{\mathbb{P}(\|X\|_B > t_n)}{\mathbb{P}(\|X\|_B \leq r)}\right]^2 = \alpha_n^2$$

für alle $n \geq 0$, d.h.

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1}^2 \leq \cdots \leq \alpha_0^{2^n} \leq \left(\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^{2^n} = 2^{-2^n}.$$

Außerdem ist

$$t_n = \Big(1 + \sqrt{2} + \cdots + (\sqrt{2})^n\Big) r = \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} r \leq (\sqrt{2})^{n+4} r,$$

womit

$$\mathbb{P}\Big(\|X\|_B > (\sqrt{2})^{n+4} r\Big) \leq \mathbb{P}\big(\|X\|_B > t_n\big) \leq \alpha_n \mathbb{P}\big(\|X\|_B \leq r\big) \leq 2^{-2^n}.$$

Mit dem Zerlegen in "Integrationsscheiben"

$$\Sigma_n = \Big\{x \in B : (\sqrt{2})^{n+4} r < \|x\|_B \leq (\sqrt{2})^{n+5} r\Big\}$$

erhält man für $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:\|x\|_B > 4r\}} \exp\big(\beta \|x\|_B^2\big) d\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Sigma_n} \exp\big(\beta \|x\|_B^2\big) d\mu(x) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\|X\|_B > (\sqrt{2})^{n+4} r\Big) \exp\big(\beta r^2 2^{n+5}\big) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} \exp\big(\beta r^2 2^{n+5}\big).
\end{aligned}$$

Für $\beta < (\log 2)/(2^5 r^2)$ folgt die Summierbarkeit und damit die Behauptung. □

Ähnlich beweist man folgenden Satz.

**Satz 3.8** (Kahane-Khintchine). *Sei $B$ ein separabler Banachraum. Dann existiert für alle $p, q \in [1, \infty)$ eine Konstante $K_{p,q}$, so dass für jede zentrierte $B$-wertige Gaußvariable gilt:*

$$\|X\|_{L_p(B)} \leq K_{p,q} \|X\|_{L_q(B)}.$$

*Beweis.* Übungsblatt 2, Aufgabe 3. *Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass es ausreicht, die Ungleichung für $p = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $q = 1$ zu beweisen. Zeigen Sie dann, dass mit $r = 3\|X\|_{L_1(B)}$ die Ungleichung $\mathbb{P}(\|X\|_B \leq r) \geq 2/3$ folgt, dieses $r$ also ein zulässiger Kandidat für die Argumentation im Beweis des Satzes von Fernique ist. □

**Definition 3.9.** *Sei $\mu$ ein zentriertes gaußsches W-Maß auf einem separablen Banachraum $B$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned}
C_\mu : B^* \times B^* &\to \mathbb{R} \\
(\ell_1, \ell_2) &\mapsto \int_B \ell_1(x) \ell_2(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

*heißt Kovarianzoperator von $\mu$.*

Offenbar ist $C_\mu$ bilinear und positiv semidefinit. Der Satz von Fernique impliziert nun unmittelbar die Beschränktheit.

**Korollar 3.10.** *Für ein zentriertes gaußsches W-Maß $\mu$ auf einem separablen Banachraum $B$ ist*

$$\sup_{\substack{\ell_1,\ell_2\in B^*:\\ \|\ell_1\|,\|\ell_2\|\le 1}} |C_\mu(\ell_1,\ell_2)| < \infty.$$

*Der assoziierte Operator*

$$\begin{aligned}\hat{C}_\mu : B^* &\to B^{**}\\ \ell &\mapsto \hat{C}_\mu(\ell)\end{aligned}$$

*mit $\hat{C}_\mu(\ell)(\ell') := C_\mu(\ell,\ell')$ für $\ell' \in B^*$ ist stetig von $B^*$ nach $B \subset B^{**}$.*

Hierbei fassen wir $B \subset B^{**}$ auf als kanonische Einbettung in $B^{**}$, welche $b \in B$ mittels der Zuweisung $b(\ell) := \ell(b)$ für alle $\ell \in B^*$ mit einem Element des Bidualraums $B^{**}$ identifiziert.

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Integrierbarkeit von $x \mapsto \|x\|_B^2$ als Konsequenz aus Satz 3.7

$$\sup_{\substack{\ell_1,\ell_2\in B^*:\\ \|\ell_1\|,\|\ell_2\|\le 1}} |C_\mu(\ell_1,\ell_2)| \le \int_B \|x\|_B^2 d\mu(x) < \infty.$$

Insbesondere ist damit $\hat{C}_\mu$ stetig als linearer Operator von $B^*$ nach $B^{**}$. Allerdings kann der Bidualraum $B^{**}$ grundsätzlich strikt größer sein als $B$. Nun ist aber für $\ell \in B^*$ nach Lemma 2.10 und Satz 3.7 die Abbildung $x \mapsto x\ell(x) \in L_1(B)$:

$$\int_B \|x\|_B |\ell(x)| d\mu(x) \le \int_B \|x\|_B^2 \|\ell\|_{B^*} d\mu(x) < \infty,$$

insbesondere $\int_B x\ell(x)d\mu(x) \in B$. Daher besitzt $\hat{C}_\mu(\ell)(\ell')$ für alle $\ell' \in B^*$ die Darstellung

$$\hat{C}_\mu(\ell)(\ell') = \int_B \ell'(x)\ell(x)d\mu(x) = \ell'\Big(\int_B x\ell(x)d\mu(x)\Big),$$

wobei die zweite Gleichheit aus obigem Lemma 2.9 folgt. □

Man kann noch etwas mehr als die Stetigkeit beweisen, nämlich dass für ein zentriertes gaußsches W-Maß $\mu$ auf einem separablen Banachraum der Operator $\hat{C}_\mu : B^* \to B \subset B^{**}$ kompakt ist (Übungsblatt 3, Aufgabe 1). Falls $B$ ein separabler Hilbertraum ist, lässt sich der Kovarianzoperator dann sogar wie folgt charakterisieren. Hierbei identifizieren wir den Hilbertraum mit seinem Dualraum mittels des Rieszschen Darstellungssatzes.

**Satz 3.11.** *Sei $(H, \|\cdot\|_H)$ ein separabler Hilbertraum und $\mu$ ein zentriertes gaußsches W-Maß darauf. Dann ist $\hat{C}_\mu : H^* = H \to H^{**} = H$ mit $C_\mu(\ell)(\ell') = \langle \hat{C}_\mu(\ell), \ell'\rangle := C_\mu(\ell,\ell')$ ein Spurklasse-Operator, der die Identität $\int_H \|x\|_H^2 d\mu(x) = tr\, \hat{C}_\mu$ erfüllt. Umgekehrt ist jeder symmetrische, positiv semidefinite Spurklasse-Operator $K : H \to H$ von der Form $K = \hat{C}_\mu$ für ein gaußsches Maß $\mu$ auf $H$.*

*Beweis.* Übungsblatt 3, Aufgabe 2. □

## 3.3. *Reproduzierende Kerne und der Satz von Cameron-Martin

Wir wenden uns nun der Relation gaußscher Maße untereinander zu. Auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Normalverteilung $\mathcal{N}(0,\Sigma)$ mit nicht-singulärer Kovarianzmatrix äquivalent (im Sinne von Absolutsstetigkeit von Maßen) zu ihrem Bildmaß $\mathcal{N}(c,\Sigma)$ unter *jeder* Translation $x \mapsto x+c$. In unendlichdimensionalen Räumen ist die Situation eine grundlegend andere. Der Teilraum der Richtungen, unter denen ein zentriertes gaußsches W-Maß $\mu$ und seine Bildmaße stetig zueinander bleiben, bildet einen mit dem Gaußmaß $\mu$ assozierten Hilbertraum $H_\mu$. Er formt eine $\mu$-Nullmenge, sobald er unendlichdimensional ist.

**Definition 3.12** (nach [1]). *Für ein zentriertes Gauß-W-Maß $\mu$ auf einem Banachraum $B$ heißt ein linearer Teilraum $H \subset B$ Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, falls gilt: Auf $H$ gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_H$, bezüglich der $H$ vollständig sowie die Einbettung $H \to B$ stetig ist, und für die Bildmaße $\mu^\ell$ unter $\ell \in B^*$ ist $\mu^\ell = \mathcal{N}(0,|\ell|_H^2)$, wobei*

$$|\ell|_H := \sup_{\substack{h\in H:\\ \|h\|_H\leq 1}} |\ell(h)|.$$

**Satz 3.13.** *Sei $\mu$ ein zentriertes Gauß-W-Maß auf einem separablen Banachraum $B$. Dann gibt es für $\mu$ einen eindeutigen Hilbertraum $(H,\|\cdot\|_H)$ mit reproduzierendem Kern.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Existenz. Für jedes $\ell \in B^*$ ist

$$\int_B |\ell(x)|^2 d\mu(x) \leq \|\ell\|_{B^*}^2 \int_B \|x\|_B^2 d\mu(x) < \infty$$

als Konsequenz aus Satz 3.7 (Satz von Fernique). Also kann jedes $\ell \in B^*$ mit einem Element aus $L_2(\mu) = L_2(B,\mathcal{B}(B),\mu)$ identifiziert werden. Sei $\overline{B^*}$ der Abschluss von $B^*$ in $L_2(\mu)$. Da jedes $\ell \in \overline{B^*}$ $L_2(\mu)$-Grenzwert einer Folge $(\ell_n)$ aus $B^*$ ist und die Zufallsvariablen $\ell_n$ unter $\mu$ zentriert normalverteilt sind, gilt dies ebenfalls für den Grenzwert ($L_2$-Konvergenz impliziert die Konvergenz in Verteilung und die Folge der charakteristischen Funktionen konvergiert gegen die des zentrierten Gaußgrenzwertes):

$$\mu^\ell = \mathcal{N}\big(0,\|\ell\|_{L_2(\mu)}^2\big).$$

Definiere weiter die lineare Abbildung $J_\mu : \overline{B^*} \longrightarrow B$ durch

$$J_\mu(\ell) = \int_B x\ell(x)d\mu(x), \quad \ell \in \overline{B^*}. \tag{3.2}$$

Dabei existiert die rechte Seite als Bochner-Integral für alle $\ell$ aus dem $L_2(\mu)$-Abschluss $\overline{B^*}$, denn $B$ ist nach Voraussetzung separabel, folglich ist $x \mapsto x\ell(x)$ als Borel-messbare Funktion nach Lemma 2.10 in $L_0(B)$, und die Integrierbarkeit folgt aus aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int \|x\ell(x)\|_B d\mu(x) \leq \|id\|_{L_2(B)}\|\ell\|_{L_2(\mu)} < \infty. \tag{3.3}$$

Außerdem ist $J_\mu$ injektiv, denn ist $\ell \in \overline{B^*}$ mit $J_\mu(\ell) = 0$ und ist $(\ell_n)$ eine Folge aus $B^*$ mit $\|\ell_n - \ell\|_{L_2(\mu)} \to 0$, so impliziert Lemma 2.9

$$0 = \ell_n(J_\mu(\ell)) = \int_B \ell_n(x)\ell(x)d\mu(x) \longrightarrow \int_B |\ell(x)|^2 d\mu(x) \quad (n \to \infty),$$

also $\ell = 0$ $\mu$-f.s. Damit wird $H = J_\mu(\overline{B^*}) \subset B$ mit dem Skalarprodukt $\langle J_\mu(\ell), J_\mu(\ell')\rangle_H = \int_B \ell(x)\ell'(x)d\mu(x)$ zu einem Hilbertraum. Es bezeichne $\|\cdot\|_H$ die entsprechende Hilbertnorm. Bleibt zu zeigen, dass $H$ ein Raum mit reproduzierendem Kern für $\mu$ ist. Wegen der Jensen-Ungleichung (Bemerkung 2.7), wonach $\|J_\mu(\ell)\|_B \leq \int_B \|x\ell(x)\|_B d\mu(x)$, und Abschätzung (3.3) ist $J_\mu$ und damit die Einbettung $(H, \|\cdot\|_H) \to (B, \|\cdot\|_B)$ stetig. Weiter gilt für jedes $\ell \in B^*$

$$|\ell|_H = \sup_{\substack{h \in H:\\ \|h\|_H = 1}} |\ell(h)| = \sup_{\substack{\ell' \in \overline{B^*}:\\ \|\ell'\|_{L_2(\mu)} = 1}} \big|\, \ell(J_\mu(\ell'))\, \big| \leq \sup_{\substack{\ell' \in L_2(\mu):\\ \|\ell'\|_{L_2(\mu)} = 1}} \left| \int_B \ell(x)\ell'(x)d\mu(x) \right| = \|\ell\|_{L_2(\mu)},$$

wobei die Integraldarstellung von $\ell(J_\mu(\ell'))$ wieder aus Lemma 2.9 folgt. Das Supremum über $\ell' \in L_2(\mu)$ mit $\|\ell'\|_{L_2(\mu)} = 1$ wird aber für $\ell' = \ell/\|\ell\|_{L_2(\mu)} \in B^*$ angenommen, womit $|\ell|_H = \|\ell\|_{L_2(\mu)}$.

Wir beweisen nun die Eindeutigkeit. Angenommen, $(\tilde{H}, \langle .,. \rangle_{\tilde{H}})$ mit $\tilde{H} \subset B$ sei ein weiterer Hilbertraum mit reproduzierendem Kern für $\mu$. Per definitionem ist die Einbettung $(\tilde{H}, \|\cdot\|_{\tilde{H}}) \to (B, \|\cdot\|_B)$ stetig, womit ${B^*}_{|\tilde{H}} \subset \tilde{H}^*$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert folglich zu jedem $\ell \in B^* \subset L_2(\mu)$ genau ein $\tilde{J}(\ell) \in \tilde{H}$, so dass

$$\|\ell\|_{L_2(\mu)} = \sup_{\substack{h \in \tilde{H}:\\ \|h\|_{\tilde{H}} \leq 1}} |\ell(h)| = \sup_{\substack{h \in \tilde{H}:\\ \|h\|_{\tilde{H}} \leq 1}} |\langle h, \tilde{J}(\ell)\rangle_{\tilde{H}}| = \|\tilde{J}(\ell)\|_{\tilde{H}}. \tag{3.4}$$

Die Abbildung $\tilde{J} : B^* \to \tilde{H}$ ist linear wegen

$$\langle h, \tilde{J}(\ell + \ell')\rangle_{\tilde{H}} = (\ell + \ell')(h) = \ell(h) + \ell'(h) = \langle h, \tilde{J}(\ell)\rangle_{\tilde{H}} + \langle h, \tilde{J}(\ell')\rangle_{\tilde{H}} = \langle h, \tilde{J}(\ell) + \tilde{J}(\ell')\rangle_{\tilde{H}}$$

für alle $h \in \tilde{H}$ und damit ist

$$\tilde{J} : (B^*, \|\cdot\|_{L_2(\mu)}) \to (\tilde{H}, \|\cdot\|_{\tilde{H}})$$

nach (3.4) stetig. Somit existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung von $\tilde{J}$ auf den $L_2(\mu)$-Abschluss $\overline{B^*}$; wegen der Polarisationsformel ist dann $\langle \tilde{J}(\ell), \tilde{J}(\ell')\rangle_{\tilde{H}} = \int \ell(x)\ell'(x)d\mu(x)$ für alle $\ell, \ell' \in \overline{B^*}$. Für $\ell \in B^*$ und $\ell' \in \overline{B^*}$ folgt weiter

$$\ell\big(\tilde{J}(\ell')\big) = \langle \tilde{J}(\ell'), \tilde{J}(\ell)\rangle_{\tilde{H}} = \int \ell(x)\ell'(x)d\mu(x) = \ell\big(J_\mu(\ell')\big),$$

also $\tilde{J}(\ell') = J_\mu(\ell')$ für alle $\ell' \in \overline{B^*}$ womit $H \subset \tilde{H}$ mit isometrischer Einbettung. Ist $\tilde{H} \neq H$, muss ein Element $\tilde{h} \neq 0$ aus dem orthogonalen Komplement $H^\perp$ von $H$ in $\tilde{H}$ existieren. Aber für $\tilde{h} \in H^\perp$ ist $\ell(\tilde{h}) = \langle \tilde{h}, J_\mu(\ell)\rangle_{\tilde{H}} = 0$ für alle $\ell \in B^*$, also $\tilde{h} = 0$ und folglich $\tilde{H} = H$. $\square$

Für ein zentriertes Gauß-W-Maß $\mu$ auf einem separablen Banachraum $B$ bezeichnen wir der Terminologie von [1] folgend mit $H_\mu$ den Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Diese Bezeichnung für $H_\mu$ ist in der Literatur allerdings nicht einheitlich. Häufig wird der $L_2(\mu)$-Abschluss $\overline{B^*}$ als Raum mit reproduzierendem Kern für $\mu$ bezeichnet und sein isomorphes Bild $H_\mu = J_\mu(\overline{B^*}) \subset B$ unter $J_\mu$ aus (3.2) als Cameron-Martin-Raum.

$H_\mu = H_\mu(B)$ ist unabhängig von $B$ in folgendem Sinne.

**Lemma 3.14.** *Sei $B$ ein separabler Banachraum und $\mu$ ein zentriertes gaußsches W-Maß darauf. Angenommen, ein Banachraum $B_1 \subset B$ ist stetig eingebettet in $B$ mit Borel-messbarem Bild und $\mu(B_1^c) = 0$. Dann gilt $H_\mu(B) = H_\mu(B_1)$.*

*Beweis.* Offenbar gilt die Inklusion $H_\mu(B_1) \subset B_1 \subset B$. Aus der Stetigkeit der Einbettung folgt $B^*{}_{|B_1} \subset B_1^*$ und $H_\mu(B_1)$ erfüllt damit alle Bedingungen aus Definition 3.12. $\square$

Mit dem $L_2(\mu)$-Abschluss $\overline{B^*}$ des Dualraums $B^*$ ergibt der Beweis von Satz 3.13 die Darstellung

$$H_\mu = \left\{ b \in B : \; b = \int x\ell(x)d\mu(x) \, (= J_\mu(\ell)) \text{ für ein } \ell \in \overline{B^*} \right\}.$$

Man beachte, dass $J_\mu(B^*)$ als kanonische Einbettung in $B^{**}$ gerade mit $\hat{C}_\mu(B^*)$ zusammenfällt. Alternativ lässt sich $H_\mu$ auch wie folgt charakterisieren.

**Lemma 3.15.** *Sei $B$ ein separabler Banachraum und $\mu$ ein zentriertes Gauß-W-Maß darauf. Dann gilt: Für ein Element $b \in B$ ist $b \in H_\mu$ genau dann, wenn*

$$\sup_{\substack{\ell \in B^*: \\ \|\ell\|_{L_2(\mu)} \leq 1}} |\ell(b)| < \infty.$$

*Beweis.* Bezeichne $b^{**}$ das Bild von $b$ unter der kanonischen Einbettung von $B$ in $B^{**}$. Ist

$$\sup_{\substack{\ell \in B^*: \\ \|\ell\|_{L_2(\mu)} \leq 1}} |\ell(b)| = \sup_{\substack{\ell \in B^*: \\ \|\ell\|_{L_2(\mu)} \leq 1}} |b^{**}(\ell)| < \infty,$$

so ist $b^{**}$ stetige Linearform bezüglich $\|\cdot\|_{L_2(\mu)}$ und lässt sich stetig auf den $L_2(\mu)$-Abschluss $\overline{B^*}$ fortsetzen. In diesem Falle existiert aber nach dem Rieszschen Darstellungssatz genau ein Element $\ell_b \in \overline{B^*}$ mit $\langle \ell, \ell_b \rangle_{L_2(\mu)} = b^{**}(\ell) = \ell(b)$ für alle $\ell \in B^*$, womit $b = J_\mu(\ell_b) \in H_\mu$ mit $J_\mu$ aus (3.2). Umgekehrt gilt für jedes $h = J_\mu(\ell_h) \in H_\mu$ nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\ell(h)| \leq \|\ell\|_{L_2(\mu)} \|\ell_h\|_{L_2(\mu)} < \infty$ für alle $\ell \in B^*$. $\square$

Die Bedeutung von $H_\mu$ besteht nun darin, dass er genau die Translationen bestimmt, entlang der $\mu$ und seine Bildmaße stetig bezüglich einander sind.

**Satz 3.16** (Cameron-Martin). *Sei $\mu$ ein zentriertes Gauß-W-Maß auf einem separablen Banachraum $B$. Für $h \in B$ bezeichne $T_h : B \to B$ die Translation $b \mapsto b - h$. Dann gilt:*

*(i)* $\mu^{T_h} \ll \mu \iff h \in H_\mu$;

*(ii) Im Falle $h \notin H_\mu$ sind $\mu$ und $\mu^{T_h}$ singulär.*

*Beweis.* (i) Für $h \in H_\mu$ sei $\ell_h \in \overline{B^*}$ mit $J_\mu(\ell_h) = h$, wobei $J_\mu$ den Isomorphismus von $\overline{B^*}$ nach $J_\mu(\overline{B^*})$ aus dem Beweis von Satz 3.13 bezeichnet. Da $\mu^{\ell_h} = \mathcal{N}(0, |\ell_h|^2_{H_\mu})$ nach Definition von $H_\mu$ ist die Abbildung $x \mapsto \exp(\ell_h(x))$ integrierbar. Mittels quadratischer Ergänzung ergibt sich $\int_B \exp(\ell_h(x))d\mu(x) = \int_\mathbb{R} \exp(z)d\mu^{\ell_h}(z) = \exp(|\ell_h|^2_{H_\mu}/2) = \exp(\|h\|^2_{H_\mu}/2)$, womit

$$\begin{aligned} D_{\ell_h} : B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp\Big(\ell_h(x) - \frac{1}{2}\|h\|^2_{H_\mu}\Big) \end{aligned}$$

eine Radon-Nikodym-Dichte $d\nu/d\mu$ ist, denn $D_{\ell_h} \in L_1(\mu)$ ist strikt positiv mit $\int D_{\ell_h} d\mu = 1$. Bleibt zu zeigen, dass $\nu = \mu^{T_h}$ ist. Dafür reicht nach Proposition 3.2 der Nachweis, dass die charakteristischen Funktionen der Bildmaße $\mu^{\ell' \circ T_h}$ und $\nu^{\ell'}$ unter allen $\ell' \in B^*$ übereinstimmen. Aber für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \int \exp(itz)d\nu^{\ell'}(z) &= \int \exp\Big(it\ell'(x) + \ell_h(x) - \frac{1}{2}\|h\|^2_{H_\mu}\Big)d\mu(x) \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\|h\|^2_{H_\mu}\Big)\int \exp(itz_1 + z_2)d\mu^{(\ell',\ell_h)}(z_1, z_2) \\ &= \exp\Big(\frac{t^2}{2}C_\mu(\ell', \ell') + it\ell'(h)\Big) \\ &= \int \exp(itz)d\mu^{\ell' \circ T_h}(z), \end{aligned}$$

wobei wir für die Auswertung des Integrals nach dem zweiten Gleichheitszeichen (Übungsaufgabe!) ausgenutzt haben, dass $(\ell', \ell_h)$ zweidimensional zentriert normalverteilt ist mit $\mathrm{Cov}(\ell', \ell_h) = \int \ell'(x)l_h(x)d\mu(x) = \ell'(\int x\ell_h(x)d\mu(x)) = \ell'(h)$. Es folgt $\mu^{T_h} = \nu$. Der Umkehrschluss "$\mu^{T_h} \ll \mu$ impliziert $h \in H_\mu$" folgt aus (ii).

(ii) Zunächst halten wir fest, dass zwei W-Maße $\mu$ und $\nu$ auf $(B, \mathcal{B}(B))$ singulär sind, falls $d_{TV}(\mu, \nu) = 1$ für den Totalvariationsabstand $d_{TV}(\mu, \nu) = \sup_{A \in \mathcal{B}(B)} |\mu(A) - \nu(A)|$ ist. Da $\ell \in B^*$ als stetige Funktion $\mathcal{B}(B)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist und damit $d_{TV}(\mu, \nu) \geq \sup_{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mu(\ell^{-1}(C)) - \nu(\ell^{-1}(C))| = d_{TV}(\mu^\ell, \nu^\ell)$, reicht es zu zeigen, dass für $h \notin H_\mu$ eine Folge $(\ell_n)$ in $B^*$ existiert mit $d_{TV}(\mu^{\ell_n}, \mu^{\ell_n \circ T_h}) \to 1$ für $n \to \infty$. Nach Lemma 3.15 existiert aber zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\ell_n \in B^*$ mit $\|\ell_n\|_{L_2(\mu)} = 1$ und $\ell_n(h) \geq n$, womit $\mu^{\ell_n} = \mathcal{N}(0, 1)$ und $\mu^{\ell_n \circ T_h} = \mathcal{N}(-\ell_n(h), 1)$. Gemäß Aufgabe 3(i) auf Übungsblatt 3 ist der Hellinger-Abstand $d_H$ zwischen zwei eindimensionalen Normalverteilungen mit Varianz 1 gegeben durch

$$d_H\big(\mathcal{N}(\mu_1, 1), \mathcal{N}(\mu_2, 1)\big) = \sqrt{1 - \exp\Big(-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{8}\Big)}$$

und somit

$$d_H\big(\mu^{\ell_n}, \mu^{\ell_n \circ T_h}\big) \geq \sqrt{1 - \exp\Big(-\frac{n^2}{8}\Big)} \longrightarrow 1.$$

Wegen $d_{TV} \geq d_H^2$ (Aufgabe 3(ii), Übungsblatt 3) folgt damit (ii). $\square$

**Bemerkung 3.17.** *Ist ein Banachraum $B$ separabel, so besitzt seine Topologie eine abzählbare Basis, womit für die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(B)$ ein abzählbares Erzeugendensystem existiert. Dies wiederum impliziert für ein zentriertes Gauß-W-Maß $\mu$ auf $B$ die Separabilität des Hilbertraums $L_2(B, \mathcal{B}(B), \mu)$ und damit insbesondere die Existenz einer Schauderbasis.*

Natürlich ist das Wienermaß $\mu_{Wiener}$ ein Beispiel für ein zentriertes gaußsches W-Maß auf dem separablen Banachraum $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$. Der (topologische) Dualraum $\mathcal{C}([0,1])^*$ ist gerade der Raum der signierten Radon-Maße. Man kann zeigen, dass $H_{\mu_{Wiener}}$ aus den absolutstetigen Funktionen auf $[0,1]$ besteht, die in Null starten und deren schwache Ableitung quadratintegrierbar ist. Da die Brownsche Bewegung f.s. keine absolutstetigen Pfade besitzt, hat das Wienermaß auf $H_{\mu_{Wiener}}$ keine Masse. Im Gegenzug liegen die absolutstetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit quadratintegrabler schwacher Ableitung nach Stone-Weierstraß aber dicht in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$, weshalb das Wienermaß auf dem Abschluss von $H_{\mu_{Wiener}}$ in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\sup})$ seine gesamte Masse hat (alle Brownschen Pfade starten in Null).

Dieses Phänomen gilt allgemein und ist Gegenstand der nachfolgenden Proposition.

**Proposition 3.18.** *Sei $\mu$ ein zentriertes gaußsches W-Maß auf einem separablen Banachraum $B$. Dann gilt:*

*(i) dim$(H_\mu) = \infty$ impliziert $H_\mu \subset N$ für eine $\mu$-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(B)$;*

*(ii) $\mu(\overline{H_\mu}) = 1$ für den Abschluss von $H_\mu$ in $(B, \|\cdot\|_B)$.*

[Dank an Ben Deitmar, der die Frage nach der Gültigkeit von (ii) während der Vorlesung aufgeworfen hat, weshalb die Proposition jetzt um diesen zweiten Teil ergänzt ist.]

*Beweis.* (i) Nach Bemerkung 3.17 existiert eine Orthonormalbasis $e_n \in \overline{B^*}$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mu^{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \otimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(0,1)$. Dann sind die Mengen $A_{n,m} = \{b \in B : |e_n(b)| > m\}$, $n \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(0,1)([-m,m]^c)$ $= \infty$. Der zweite Teil des Borel-Cantelli-Lemmas impliziert für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\Big(\Big\{b \in B : \sup_n |e_n(b)| > m\Big\}\Big) \geq \mu\Big(\limsup_n A_{n,m}\Big) = 1,$$

und aus der Stetigkeit von oben folgt $\mu(\sup_n |e_n| = \infty) = 1$. Aber das bedeutet für $\mu$-fast alle $b \in B$:

$$\sup_{\substack{\ell \in \overline{B^*}: \\ \|\ell\|_{L_2(\mu)} \leq 1}} |\ell(b)| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |e_n(b)| = \infty,$$

was äquivalent ist zu $b \notin H_\mu$ nach Lemma 3.15.

(ii) Angenommen, $\mu(\overline{H_\mu}) < 1$. Dann gibt es ein $b$ mit $\mu(U) > 0$ für alle $U$ offen in $(B, \|\cdot\|_B)$ mit $b \in U$ sowie eine offene Kugel $\tilde{U}$ um $b$ mit $\tilde{U} \cap H_\mu = \emptyset$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert somit ein $\ell \in B^* \setminus \{0\}$ mit $\ell(h) = 0$ für alle $h \in H_\mu$, aber $\ell(b) > 0$. Die Stetigkeit von $\ell$ impliziert dann $\ell(b') > \ell(b)/2$ für alle $b'$ in einer geeigneten (offenen) Umgebung $\tilde{U}'$ von $b$ in $\tilde{U}$. Wegen $\mu(\tilde{U}') > 0$ folgt der Widerspruch $0 < \|\ell\|_{L_2(\mu)} = |\ell|_{H_\mu} = 0$. $\square$

## 3.4. Der Konvergenzsatz von Itô-Nisio und die Karhunen-Loève-Entwicklung

Der Satz von Itô-Nisio beinhaltet gleich zwei Pointen für das Konvergenzverhalten von Reihen $(S_n = \sum_{i=1}^n X_i)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger symmetrischer Zufallsvariablen $X_i$ mit Werten in einem separablen Banachraum $B$. Zum einen bleibt die bereits aus dem Reellen als Satz von Kolmogorov hierfür bekannte Äquivalenz von stochastischer und f.s.-Konvergenz bestehen: $S_n \to_{\mathbb{P}} S \Leftrightarrow S_n \to S$ f.s. Die weitaus größere Bedeutung hat die zweite Pointe – nämlich die Äquivalenz von f.s. starker und f.s. schwacher (im funktionalanalytischen Sinne) Konvergenz: $S_n \to S$ f.s. $\Leftrightarrow \ell(S_n) \to \ell(S)\ \forall\, \ell \in B^*$ f.s. Diese wird noch bereichert durch den Sachverhalt, dass die Ausnahmemenge nicht einmal gleichmäßig für den Dualraum konstruiert sein muss, denn sogar stochastische Konvergenz $\ell(S_n) \to_{\mathbb{P}} \ell(S)\ \forall \ell \in B^*$ ist äquivalent.

**Satz 3.19** (Itô-Nisio)**.** *Seien $(B, \|\cdot\|_B)$ ein separabler Banachraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $B$-wertiger unabhängiger symmetrischer Zufallsvariablen sowie $S$ eine $B$-wertige Zufallsvariable auf einem gemeinsamen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(i) Es gilt $\ell(S_n) \to \ell(S)$ für alle $\ell \in B^*$ $\mathbb{P}$-f.s.;*

*(ii) Für jedes $\ell \in B^*$ gilt $\ell(S_n) \to_{\mathbb{P}} \ell(S)$;*

*(iii) $S_n \to S$ $\mathbb{P}$-f.s.;*

*(iv) $S_n \to_{\mathbb{P}} S$.*

*Falls diese äquivalenten Bedingungen gelten und $\mathbb{E}\|S\|_B^p < \infty$ für ein $1 \le p < \infty$, folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\|S - S_n\|_B^p = 0.$$

*Beweis.* Wir beweisen (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii), alle anderen Implikationen sind klar.

(ii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Der Beweis untergliedert sich in zwei Schritte.

Schritt 1: Wir wollen zuerst zeigen, dass die Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_n - S)_{n\in N}$ straff sind. Nach Voraussetzung sind für jedes $\ell \in B^*$ und $k \ge n$ die Zufallsvariablen $\ell(S_n)$ und $\ell(S_k - S_n)$ stochastisch unabhängig. Da weiter $\ell(S_k - S_n) = \ell(S_k) - \ell(S_n) \to_{\mathbb{P}} \ell(S) - \ell(S_n) = \ell(S - S_n)$ für $k \to \infty$, sind auch $\ell(S_n)$ und $\ell(S - S_n)$ stochastisch unabängig. Wir überlegen uns nun, dass $S - 2S_n$ und $S$ identisch verteilt sind. Nach Proposition 3.2 reicht dafür der Nachweis, dass $\mathbb{P}^{\ell(S)}$ und $\mathbb{P}^{\ell(S-2S_n)}$ für alle $\ell \in B^*$ identisch sind. Letzteres gilt aber, da für alle $t \in \mathbb{R}$ wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\big(it\ell(S)\big) &= \mathbb{E}\exp\big(it\ell(S-S_n)\big)\mathbb{E}\exp\big(it\ell(S_n)\big)\\ &= \mathbb{E}\exp\big(it\ell(S-S_n)\big)\mathbb{E}\exp\big(-it\ell(S_n)\big)\\ &= \mathbb{E}\exp\big(it\ell(S-2S_n)\big)\end{aligned}$$

die charakteristischen Funktionen übereinstimmen, wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen die Symmetrie von $S_n$ verwendet haben. Da $(B, \|\cdot\|_B)$ polnisch ist, ist $\mathbb{P}^S$ nach dem Satz von Ulam straff – also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K = K_\varepsilon$ aus $B$ mit $\mathbb{P}(S \in K) > 1 - \varepsilon$. Dann ist auch $K' = \{b \in B : 2b = b_1 - b_2 \text{ für } b_1, b_2 \in K\}$ kompakt, denn ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K'$ mit $2b_n = b_{1n} - b_{2n}$ und $b_{1n}, b_{2n} \in K$, so existiert nach Kompaktheit von $K$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, entlang der sowohl $(b_{1n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ als auch $(b_{2n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, also auch $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (in metrischen Räumen gilt Kompaktheit = Folgenkompaktheit). Wegen $S, S - 2S_n \in K \Rightarrow S_n \in K'$ folgt

$$\mathbb{P}(S_n \notin K') \leq \mathbb{P}(S \notin K) + \mathbb{P}(S - 2S_n \notin K) = 2\mathbb{P}(S \notin K) \leq 2\varepsilon,$$

also ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff. Mit $K'' = K - K'$ ergibt sich analog die Straffheit von $(S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Schritt 2:</u> Wir zeigen nachfolgend die stochastische Konvergenz $\mathbb{P}(\|S - S_n\|_B \geq \varepsilon) \to 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch Widerspruch. Angenommen, es existieren $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$, so dass $\mathbb{P}(\|S - S_{n_k}\|_B \geq \varepsilon) \geq \eta$ für eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Schritt 1 existiert ein Kompaktum $K \subset B$ mit $\mathbb{P}(S - S_n \in K) \geq 1 - \eta/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit für die offene $\varepsilon$-Kugel $U_\varepsilon(0) = \{b \in B : \|b\|_B < \varepsilon\}$ um 0 folgt

$$\mathbb{P}\big(S - S_{n_k} \in K \cap U_\varepsilon(0)^c\big) \geq \eta/2 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Nun ist $K \cap U_\varepsilon(0)^c$ als Schnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge aber wieder kompakt, wird also insbesondere durch endlich viele offene Kugeln $U_{\varepsilon/2}(b_1), \ldots, U_{\varepsilon/2}(b_{m(\varepsilon)})$ vom Radius $\varepsilon/2$ mit Mittelpunkten $b_i \in U_\varepsilon(0)^c$ überdeckt. Für jedes $k$ muss wegen (3.5) ein Index $i_k \in \{1, \ldots, m(\varepsilon)\}$ existieren mit $\mathbb{P}^{S-S_{n_k}}(K \cap U_{\varepsilon/2}(b_{i_k})) \geq \delta = \eta/(2m(\varepsilon))$. Also existiert eine weitere Teilfolge $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $b \in \{b_1, \ldots, b_{m(\varepsilon)}\}$ mit

$$\mathbb{P}^{S-S_{n_{k_j}}}\big(K \cap U_{\varepsilon/2}(b)\big) \geq \delta \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine stetige Linearform $\ell \in B^*$ mit $\|\ell\|_{op} = 1$ und $\ell(b) = \|b\|_B > 0$. Wegen $b \notin U_\varepsilon(0)$ ist $\ell(x) = \|b\|_B + \ell(x - b) \geq \varepsilon - \|x - b\|_B \geq \varepsilon/2$ für alle $x \in U_{\varepsilon/2}(b)$. Es folgt die Inklusion

$$\big\{S - S_{n_{k_j}} \in K \cap U_{\varepsilon/2}(b)\big\} \subset \big\{\ell(S - S_{n_{k_j}}) \geq \varepsilon/2\big\},$$

was wegen (3.6) im Widerspruch steht zur stochastischen Konvergenz $\ell(S_n) \to_{\mathbb{P}} \ell(S)$.

<u>(iv) $\Rightarrow$ *(iii)*:</u> Wir machen Gebrauch von folgendem Lemma, dessen Aussage im Falle $S_k \in L_1(B)$ (was wir an dieser Stelle aber nicht voraussetzen) auch eine Konsequenz aus der Doobschen Maximalungleichung ist.

<u>Lemma:</u> Für alle $r > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} \|S_k\|_B \geq r\Big) \leq 2\mathbb{P}\big(\|S_n\|_B \geq r\big). \tag{3.7}$$

(Beweis: Übungsblatt 4, Aufgabe 1)

Angenommen, es gelte $S_n \to_{\mathbb{P}} S$. Nach obigem Lemma ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\max_{n\leq j\leq m} \|S_j - S_n\|_B > r\Big) &\leq 2\mathbb{P}\big(\|S_m - S_n\|_B \geq r\big)\\ &\leq 2\mathbb{P}\Big(\|S_m - S\|_B \geq \frac{r}{2}\Big) + 2\mathbb{P}\Big(\|S - S_n\|_B \geq \frac{r}{2}\Big).\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ folgt nach der Stetigkeit von unten auf der linken und der vorausgesetzten stochastischen Konvergenz auf der rechten Seite

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{j\geq n} \|S_j - S_n\|_B > r\Big) \leq 2\mathbb{P}\Big(\|S - S_n\|_B \geq \frac{r}{2}\Big),$$

womit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j\geq n} \|S_j - S_n\|_B > r\Big) = 0. \tag{3.8}$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\mathbb{P}\Big(\sup_{j\geq n} \|S_j - S\|_B > 2r\Big)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{j\geq n} \|S_j - S_n\|_B > r\Big) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\|S_n - S\|_B > r\Big) = 0\end{aligned}$$

nach (3.8) und der stochastischen Konvergenz von $S_n \to_{\mathbb{P}} 0$. Da $\|S_n - S\|_B \to 0$ f.s. äquivalent zur stochastischen Konvergenz von $\sup_{j\geq n} \|S_j - S\|_B \to_{\mathbb{P}} 0$ für $n \to \infty$ ist, folgt (iv).

Es bleibt die Konvergenz im $p$-ten Mittel zu zeigen. Dafür formulieren wir folgende Proposition, die auch von eigenständigem Interesse ist.

**Proposition 3.20.** *Seien $(B, \|\cdot\|_B)$ ein separabler Banachraum und $X, Y$ stochastisch unabhängige $B$-wertige Zufallsvariablen, wobei $X$ oder $Y$ symmetrisch ist. Dann gilt für alle $p \in [1, \infty)$*

$$\mathbb{E}\|X\|_B^p \leq \mathbb{E}\|X + Y\|_B^p.$$

*Beweis von Proposition 3.20.* Seien $p \in [1, \infty)$ und $\mathbb{E}\|X + Y\|_p^p < \infty$ (andernfalls ist die Ungleichung trivial). Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für die $L_p(B)$-Norm und der Verteilungsgleichheit $\mathcal{L}(\|X - Y\|_B) = \mathcal{L}(\|X + Y\|_B)$

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{E}\|X\|_B^p\big)^{1/p} &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}\|X + Y + (X - Y)\|_B^p\big)^{1/p}\\ &\leq \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}\|X + Y\|_B^p\big)^{1/p} + \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}\|X - Y\|_B^p\big)^{1/p}\\ &= \big(\mathbb{E}\|X + Y\|_B^p\big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Nun zurück zum Beweis der in Satz 3.19 behaupteten $L_p$-Konvergenz. Da $\ell(S_n)$ und $\ell(S - S_n)$ für jedes $\ell \in B^*$ stochastisch unabhängig sind, gilt dies nach Bemerkung 3.4 auch für $S_n$ und $S - S_n$. Zusammen mit der Symmetrie von $S_n$ folgt $\mathbb{E}\|S_n\|_B^p \leq E\|S\|_B^p$ aus Proposition 3.20. Mithilfe partieller Integration und Ungleichung (3.7) aus obigem Lemma erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\max_{1\leq k\leq n} \|S_k\|_B^p\Big) &= \int_0^\infty pr^{p-1}\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} \|S_k\|_B > r\Big)dr\\ &\leq \int_0^\infty pr^{p-1}2\mathbb{P}\big(\|S_n\|_B > r\big)dr = 2\mathbb{E}\|S_n\|_B^p \leq 2\mathbb{E}\|S\|_B^p.\end{aligned}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz ergibt weiter

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_k\|_B^p\Big) \le 2\mathbb{E}\|S\|_B^p,$$

und $\mathbb{E}\|S - S_n\|_B^p \to 0$ folgt dann aus dem Satz von der dominierten Konvergenz. $\square$

Da für ein zentriertes Gaußmaß $\mu$ auf einem separablen Banachraum $B$ der Hilbertraum $(\overline{B^*}, \|\cdot\|_{L_2(\mu)})$ nach Bemerkung 3.17 separabel ist und somit eine (endliche oder abzählbar unendliche) orthonormale Schauderbasis $(\ell_n)_{n\ge1}$ besitzt, lässt sich jedes $\ell$ aus $B^* \subset L_2(\mu)$ in eine $L_2(\mu)$-konvergente Reihe entwickeln: $\ell = \sum_{n\ge1} \ell_n\langle \ell, \ell_n\rangle_{L_2(\mu)}$. Als Konsequenz aus dem Satz von Itô-Nisio ergibt sich die Reihenentwicklung einer $B$-wertigen zentrierten Gaußvariable, wenn man die stetigen Linearformen $\ell \in B^*$ darauf anwendet.

**Satz 3.21** (Karhunen-Loève)**.** *Seien $B$ ein separabler Banachraum und $X$ eine zentrierte $B$-wertige Gaußvariable. Dann sind für jede Orthonormalbasis $(\ell_n)_{n\ge1}$ des $L_2(\mathbb{P}^X)$-Abschlusses $\overline{B^*}$ die Zufallsvariablen $\ell_n(X) \sim_{iid} \mathcal{N}(0,1)$ und*

$$X = \sum_{n\ge1} \ell_n(X) J_{\mathbb{P}^X}(\ell_n), \tag{3.9}$$

*wobei im Falle $\dim(\overline{B^*}) = \infty$ die Reihe $\mathbb{P}$-f.s. und in $L_p(B)$ konvergiert für $p \in [1,\infty)$.*

Hierbei bezeichnet $J_{\mathbb{P}^X}$ den Isomorphismus von $\overline{B^*} \to J_\mu(\overline{B^*}) \subset B$ aus (3.2) für $\mu = \mathbb{P}^X$:

$$J_{\mathbb{P}^X}(\ell_n) = \int_B x\ell_n(x)d\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{E}\big(X\ell_n(X)\big).$$

*Beweis.* Da $\mathbb{P}^{\ell(X)} = \mathcal{N}(0, \|\ell\|_{L_2(\mathbb{P}^X)})$ für alle $\ell \in B^*$ gilt dies auch für alle $\ell \in \overline{B^*}$, denn Konvergenz zentrierter reeller Gaußvariablen im quadratischen Mittel impliziert die Konvergenz der entsprechenden charakteristischen Funktionen gegen die einer zentrierten Normalverteilung mit dem Grenzwert der Varianzen. Da je endlich viele gemeinsam normalverteilt sind, impliziert die $L_2(\mathbb{P}^X)$-Orthogonalität von $(\ell_n)$, dass $\ell_n(X)$, $n \ge 1$, stochastisch unabhängig sind. Für endlichdimensionales $\overline{B^*}$ ist nichts weiter zu zeigen, denn nach Anwendung von $\ell \in B^*$ auf beiden Seiten erhält man eine Identität. Sei also $\dim(\overline{B^*}) = \infty$. In dem Fall gilt für jedes $\ell \in B^*$

$$\ell\Big(\sum_{n=1}^k \ell_n(X)\big(J_{\mathbb{P}^X}(\ell_n)\big)\Big) = \sum_{n=1}^k \ell_n(X)\langle \ell, \ell_n\rangle_{L_2(\mathbb{P}^X)} \longrightarrow_{L_2(\mathbb{P})} \ell(X)$$

für $k \to \infty$, wobei das Gleichheitszeichen nach Lemma 2.9 gilt. Nach Satz 3.19 konvergiert die Reihe $(\sum_{n=1}^k \ell_n(X)J_{\mathbb{P}^X}(\ell_n))_{k\in\mathbb{N}}$ dann sowohl $\mathbb{P}$-f.s. in $(B, \|\cdot\|_B)$ als auch in $L_p(B)$ gegen $X$, denn $\mathbb{E}\|X\|_B^p < \infty$ für alle $p \in [1,\infty)$ nach dem Satz von Fernique. $\square$

Die Konvergenz der Reihe lässt sich übrigens auch aus der Martingaltheorie für Banachraum-wertige Martingale (Satz 4.8 und Satz 4.9 aus dem folgenden Kapitel) ableiten, deren Theorie wir an dieser Stelle aber noch nicht entwickelt haben ($\to$ Übungsblatt 6, Aufgabe 2).

# 4. Martingale in Banachräumen

Martingalargumente treten bei der klassischen Itô-Integrationstheorie prominent auf. In Vorbereitung auf das stochastische Integral in unendlicher Dimension entwickeln wir das Banachraum-wertige Pendant zum reellwertigen Martingal. Dabei gehen wir etwas weiter als für diese Zwecke erforderlich, um zumindest einen Einblick in die spannende Anwendung von Martingalen auf die Strukturtheorie von Banachräumen zu erlauben.

## 4.1. Bedingte Erwartungen und Martingale

Sind $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{A}$, so ist abstrakt die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')$ einer reellwertigen Zufallsvariable definiert als $\mathbb{P}$-f.s. eindeutige $\mathcal{A}'$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}X\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')\big] \quad \forall\, A' \in \mathcal{A}'.$$

Auf $L_p(\mathbb{P})$ ist die Zuordnung $X \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{A}')$ linear und zudem eine positive Kontraktion für alle $1 \le p < \infty$: $X \ge 0$ impliziert $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}') \ge 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')|^p \le \mathbb{E}\mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{A}') = \mathbb{E}|X|^p$ nach der Jensen-Ungleichung und der Turmeigenschaft für die bedingte Erwartung. Ein entsprechender Ansatz zur Verallgemeinerung auf Banachraum-wertige Zufallsvariablen liegt auf der Hand.

**Satz 4.1** (Bedingte Erwartung)**.** *Seien $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{A}$. Dann existiert ein eindeutiger beschränkter linearer Operator von Norm* 1,

$$L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B) \to L_1(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}; B), \quad X \mapsto \mathbb{E}(X|\mathcal{A}')$$

*mit der Eigenschaft, dass*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}X\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')\big] \quad \forall\, A' \in \mathcal{A}'. \tag{4.1}$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}']$ *heißt bedingter Erwartungswert von $X$ gegeben $\mathcal{A}'$. Es gilt*

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{A}')\|_B \le \mathbb{E}\big(\|X\|_B \,\big|\, \mathcal{A}'\big) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \tag{4.2}$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Existenz. Sei $X \in F(B)$, d.h. $X = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} \otimes b_n$ mit paarweise disjunkten $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und $b_1, \dots, b_n \in B$. Dann ist die Zufallsvariable $T(X) = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}|\mathcal{A}') \otimes b_n$, wobei $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}|\mathcal{A}')$ der skalare bedingte Erwartungswert ist, $\mathcal{A}'$-$\mathcal{B}(B)$-messbar und erfüllt (4.1). Es gilt

$$\|T(X)\|_B \le \sum_{n=1}^N \|b_n\|_B \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}|\mathcal{A}') = \mathbb{E}\bigg(\sum_{n=1}^N \|b_n\|_B \mathbb{1}_{A_n} \,\bigg|\, \mathcal{A}'\bigg) = \mathbb{E}(\|X\|_B|\mathcal{A}') \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.3}$$

und damit (4.2). Insbesondere ist $T : F(B) \to L_1(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}; B)$ linear und stetig mit durch 1 beschränkter Operatornorm. $\|T\|_{op} = 1$ ergibt sich, weil für $X = \mathbb{1}_\Omega \otimes b$ mit $b \in B$ in (4.3) überall Gleichheit gilt. Da $F(B)$ nach Proposition 2.4 (i) dicht in

$L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$ liegt, existiert nach dem Fortsetzungssatz für gleichmäßig stetige Abbildungen in Banachräume eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$, die wir wieder mit $T$ bezeichnen. Sie ist linear und normerhaltend beschränkt. Weiter ist für $X_n \in F(B)$ mit $X_n \to_{L_1(B)} X$ auch $\mathbb{1}_{A'} X_n \to_{L_1(B)} \mathbb{1}_{A'} X$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$, womit wegen der $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$-$L_1(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}; B)$-Stetigkeit von $T$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} X\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} X_n\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} T(X_n)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} T(X)\big],$$

also (4.1) gilt. Was die Eindeutigkeitsaussage von $T$ anbelangt, müssen wir lediglich verifizieren, dass (4.1) die Definition für $X \in F(B)$ bereits festlegt. Dies ist aber eine Konsequenz aus der $L_1(\mathbb{P})$-Eindeutigkeit der bedingten Erwartung im skalaren Fall.

Es bleibt (4.2) für beliebiges $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$ zu zeigen. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $F(B)$ mit $X_n \to_{L_1(B)} X$. Stetigkeit von $T$ impliziert $T(X_n) \to_{L_1(B)} T(X)$; die $L_1(\mathbb{P})$-Stetigkeit der skalaren bedingten Erwartung ergibt $\mathbb{E}(\|X_n\|_B|\mathcal{A}') \to_{L_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}(\|X_n\|_B|\mathcal{A}')$. Da $L_1(\mathbb{P})$-Konvergenz eine $\mathbb{P}$-f.s. konvergente Teilfolge impliziert, gelten $\mathbb{P}$-f.s. sowohl $\|X_{n_k} - X\|_B \to 0$, $\|T(X_{n_k}) - T(X)\|_B \to 0$ als auch $\mathbb{E}(\|X_{n_k}\|_B|\mathcal{A}') \to \mathbb{E}(\|X\|_B|\mathcal{A}')$ für eine geeignete Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.Wegen (4.3) ist $\mathbb{P}$-f.s.

$$\|T(X)\|_B \leq \|T(X) - T(X_{n_k})\|_B + \|T(X_{n_k})\|_B \leq \|T(X) - T(X_{n_k})\|_B + \mathbb{E}(\|X_{n_k}\|_B|\mathcal{A}'),$$

und für $k \to \infty$ entsteht auf der rechten Seite $\mathbb{E}(\|X\|_B|\mathcal{A}')$ $\mathbb{P}$-f.s. und damit (4.2). □

**Bemerkung 4.2.** *Zu $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$ ist eine Lösung $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}; B)$ von*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} X\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'} Y\big] \ \forall A' \in \mathcal{A}'$$

*wie im skalaren Fall eindeutig. Denn sind $Y, Y' \in L_1(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}; B)$ Lösungen, dann gilt für alle $\ell \in B^*$ nach Lemma 2.9 auch $\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}\ell(Y)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{A'}\ell(Y')\big]$ $\forall A' \in \mathcal{A}'$, womit $\ell(Y) = \ell(Y')$ $\mathbb{P}$-f.s. Da $Y - Y'$ aber $\mathbb{P}$-fast sicherer Grenzwert von $F(B)$-Funktionen ist und damit $\mathbb{P}$-f.s. sein Bild eine abzählbare $\|\cdot\|_B$-dichte Teilmenge besitzt, existiert in Analogie zu Lemma 3.3 als Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach eine Folge stetiger Linearformen $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $B^*$ mit $\|Y - Y'\|_B = \sup_n \ell_n(Y - Y')$ $\mathbb{P}$-f.s. und damit $\|Y - Y'\|_B = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.*

**Beispiel 4.3.** *Sei $(0,1) = \cup_{n=1}^N I_n$, wobei $I_n$, $n = 1, \ldots, N$, paarweise disjunkte Intervalle sind mit $\lambda(I_n) > 0$. Seien $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0,1))$ und $\mathcal{A}' = \sigma(I_1, \ldots, I_N)$, ferner $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum. Dann gilt für $X \in L_1((0,1), \mathcal{A}, \lambda; B)$ $\mathbb{P}$-f.s.*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{A}') = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{I_n} \otimes c_n \quad \textit{mit} \quad c_n = \frac{1}{\lambda(I_n)} \int_{I_n} X d\lambda.$$

*Denn offenbar ist $\sum \mathbb{1}_{I_n} \otimes c_n$ $\mathcal{A}'$-$\mathcal{B}(B)$-messbar und erfüllt (4.1).*

Mithilfe der Relation (4.1) zeigt man, dass die bedingte Erwartung Banachraum-wertiger Zufallsvariablen nach wie vor die aus dem skalaren Fall bekannte Turmeigenschaft erfüllt (Übungsblatt 4, Aufgabe 2(i)).

Wegen Bemerkung 4.2 impliziert Lemma 2.9 unmittelbar, dass für jedes $\ell \in B^*$ $\ell(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}'))$ eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(\ell(X)|\mathcal{A}')$ ist. Der Witz der nächsten Proposition ist, dass hiervon eine Umkehrung gilt.

**Proposition 4.4.** *Seien $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{A}$. Seien $X, Y \in L_1(B)$. Dann gilt:*

$$Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{A}') \iff \mathbb{E}(\ell(X)|\mathcal{A}') = \ell(Y) \quad \forall\, \ell \in B^*.$$

*Beweis.* Übungsblatt 4, Aufgabe 3. □

Nachfolgend seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $I$ eine geordnete Indexmenge, $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$ und $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum.

**Definition 4.5.** *Eine Familie $M = (M_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen aus $L_1(B)$ heißt Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$, wenn gilt:*

$$\mathbb{E}\big(M_i \,\big|\, \mathcal{F}_j\big) = M_j \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } i, j \in I \text{ mit } i \geq j.$$

*Gilt für ein $p > 1$ zudem $M_i \in L_p(B)$ für alle $i \in I$, nennen wir $M$ ein $L_p(B)$-Martingal.*

Nach Proposition 4.4 ist eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ aus $L_1(B)$ genau dann ein Martingal, wenn für jede stetige Linearform $\ell \in B^*$ die Familie $\big(\ell(M_i)\big)_{i\in I}$ ein reellwertiges Martingal ist. Entsprechend verallgemeinern sich Sätze wie das Optional-Sampling-Theorem auf Banachraum-wertige Martingale ($\to$ Übungsblatt 5, Aufgabe 2).

**Proposition 4.6.** *Sei $M$ ein $L_p(B)$-Martingal für ein $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

*(i)* $\big(\|M_i\|_B^p\big)_{i\in I}$ *ein reelles Submartingal.*

*Ist zudem $I$ abzählbar oder besitzt $M$ rechtsseitig stetige Pfade, so gelten weiter*

*(ii)*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{i\in I} \|M_i\|_B > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \sup_{i\in I} \mathbb{E}\big(\|M_i\|_B^p\big)$$

*(iii) und falls $p > 1$ auch*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{i\in I} \|M_i\|_B^p\Big) \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sup_{i\in I} \mathbb{E}\big(\|M_i\|_B^p\big).$$

*Beweis.* (i) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $B$ separabel ist, da für jedes Paar $i, j \in I$ außerhalb einer Nullmenge $N = N_{ij}$ die Menge $M_i(\Omega \setminus N) \cup M_j(\Omega \setminus N)$ eine abzählbare bezüglich $\|\cdot\|_B$ dichte Teilmenge besitzt. Nach Lemma 3.3 existiert dann eine Folge $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $B^*$ mit $\|b\|_B = \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \ell(b)$ [Die Beträge in der Formulierung des Lemmas kann man weglassen, wenn man zu $\ell_n$ auch $-\ell_n$ hinzunimmt.]. Damit ist nach Monotonie der skalaren bedingten Erwartung

$$\mathbb{E}\big(\|M_j\|_B \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(\ell_n(M_j) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \ell_n\Big(\mathbb{E}\big(M_j \,\big|\, \mathcal{F}_i\big)\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \ell_n(M_i) = \|M_i\|_B,$$

was den Fall $p = 1$ beweist. Wegen $\mathbb{E}\big(\|M_j\|_B^p \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \geq \big(\mathbb{E}\big(\|M_j\|_B \,\big|\, \mathcal{F}_i\big)\big)^p$ nach der Jensen-Ungleichung für die skalare bedingte Erwartung folgt die Aussage auch für $p > 1$.

Die Aussagen (ii) und (iii) sind die Doobsche Maximalungleichung für nicht-negative reellwertige Submartingale. Wir erinnern hier an den (wunderschönen) Extrapolationstrick, mit welchem (iii) auf Basis von (ii) bewiesen wurde. □

## 4.2. *Radon-Nikodym-Eigenschaft (RNP) und Martingalkonvergenz

In der reellwertigen Martingaltheorie ist ein $L_p$-beschränktes Martingal mit $p \geq 1$ automatisch fast sicher konvergent. Dieses Phänomen ist im Allgemeinen für Martingale in Banachräumen nicht länger gültig.

**Beispiel 4.7.** *Seien $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ und $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine iid-Folge aus Rademachervariablen, also $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $M_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k$, $n \in \mathbb{N}$, ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $L_1$-beschränktes reellwertiges Martingal. Nach dem Martingalkonvergenzsatz ist es $\mathbb{P}$-f.s. konvergent.*

*Wir konstruieren nun ein sehr ähnliches Banachraum-wertiges Martingal, welches nicht $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert. Seien $(B, \|\cdot\|_B) = (c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ der (vollständige) Teilraum von $\ell_\infty$ bestehend aus den Nullfolgen sowie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die kanonische Schauderbasis. Mit $M_n = \sum_{k=1}^n e_k \varepsilon_k$ ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $L_p(B)$-beschränktes Martingal für jedes $p \geq 1$, denn*

$$\mathbb{E}\|M_n\|_B^p = \mathbb{E}\Big(\sup_{k\leq n} |\varepsilon_k|^p\Big) = 1.$$

*Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ ist allerdings $\|M_n - M_k\|_B = 1$ $\mathbb{P}$-f.s., womit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-f.s.* ***keine*** *Cauchyfolge in $(B, \|\cdot\|_B)$ ist.*

Aus der reellwertigen Martingaltheorie ist bekannt, dass im Falle $p > 1$ ein skalares $L_p$-beschränktes Martingal $L_p$-konvergent ist. Auch das ist in allgemeinen Banachräumen nicht mehr korrekt, wie der nächste Satz im Hinblick auf Beispiel 4.7 demonstriert.

**Satz 4.8.** *Seien $1 \leq p < \infty$, $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal. Dann gilt: Konvergiert $(M_n)$ in $L_p(B)$ gegen ein $M_\infty \in L_p(B)$, so folgt $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$ und $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass $\sup_{n\geq k} \|M_n - M_k\|_{L_1(B)} < \varepsilon$. Wenden wir Proposition 4.6 (ii) auf das Martingal $M' = (M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$M'_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq k \\ M_n - M_k & \text{falls } n > k \end{cases}$$

an, so folgt

$$\sup_{t>0} t \cdot \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq k} \|M_n - M_k\|_B > t\Big) \leq \varepsilon.$$

Für den punktweisen Grenzwert

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geq k} \|M_n - M_m\|_B$$

ist aber

$$\eta = \inf_{k\geq 0} \sup_{m,n\geq k} \|M_n - M_m\|_B \leq 2 \sup_{n\geq k} \|M_n - M_k\|_B$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und folglich $\sup_{t>0} t \cdot \mathbb{P}(\eta > 2t) \leq \varepsilon$. Also ist $\eta = 0$ $\mathbb{P}$-f.s., womit $(M_n)$ in $(B, \|\cdot\|_B)$ $\mathbb{P}$-f.s. eine Cauchyfolge ist. Die Vollständigkeit des Banachraums impliziert $M_n \to M_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s, da nach Voraussetzung bereits $\mathbb{E}\|M_n - M_\infty\|_B \to 0$. □

Der vorangehende Satz bestätigt aber immerhin die für skalare Martingale gültige Implikation "$L_p$-Konvergenz $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$-f.s.-Konvergenz" auch für Martingale in Banachräumen. Natürlich drängt sich damit unmittelbar die Frage auf, wann ein $L_p(B)$-Martingal konvergent ist in $L_p(B)$.

**Satz 4.9.** *Seien $1 \leq p < \infty$, $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $M_\infty$ eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable aus $L_p(B)$. Dann gilt:*

$$M_n \to_{L_p(B)} M_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n).$$

*Beweis.* "$\Rightarrow$": Konvergiert die Folge $(M_n)$ in $L_p(B)$ gegen ein $M_\infty \in L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}; B)$, so ist $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn einerseits impliziert die $L_p(B)$-Stetigkeit der bedingten Erwartung, dass $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) \to_{L_p(B)} \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_m)$ für $n \to \infty$, andererseits ist die linke Seite ab $n = m$ wegen $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) = M_m$ für $n \geq m$ konstant.
"$\Leftarrow$": Wir beweisen zunächst:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_p(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}; B) \;\text{ liegt dicht in }\; L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}; B). \tag{4.4}$$

Bezeichne $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})}$ den $L_p$-Abschluss von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$. Damit ist

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{A} : \mathbb{1}_A \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})} \right\}$$

eine $\sigma$-Algebra (die Stabilität gegenüber abzählbar unendlichen Vereinigungen folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz). Dies impliziert $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{C}$, denn nach Konstruktion ist $\cup_n \mathcal{F}_n \subset \mathcal{C}$. Nun ist aber jedes $f \in L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}; B)$ nach Proposition 2.4 $L_p(B)$-Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen der Form $\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k} \otimes b_k$ mit $A_1, \ldots, A_N$ aus $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{C}$ und $b_1, \ldots, b_N \in B$, womit $f \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_p(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}; B)}$ und damit (4.4) folgt. Mit dieser Erkenntnis beweisen wir jetzt die noch offene Implikation des Satzes. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach (4.4) $k \in \mathbb{N}$ und $g \in L_p(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}; B)$ mit $\mathbb{E}\|M_\infty - g\|_B^p < \varepsilon$. Wegen $g = \mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n)$ für alle $n \geq k$ ist für diese

$$M_n - M_\infty = \mathbb{E}(M_\infty - g|\mathcal{F}_n) + g - M_\infty$$

und schließlich nach (4.2)

$$\|M_n - M_\infty\|_{L_p(B)} \leq \|\mathbb{E}(M_\infty - g|\mathcal{F}_n)\|_{L_p(B)} + \|g - M_\infty\|_{L_p(B)} \leq 2\varepsilon.$$

□

Die Erkenntnis, dass das aus dem Reellen bekannte Phänomen "Beschränktheit impliziert Konvergenz" für Martingale in Banachräumen so allgemein nicht gültig ist, motiviert das Interesse an der exakten Charakterisierung derjenigen Banachräume, in denen der Martingalkonvergenzsatz gilt. Es stellt sich heraus, dass dies gerade die Banachräume mit der sogenannten Radon-Nikodym-Eigenschaft sind. Für deren Formulierung wird der Begriff des Vektormaßes benötigt.

**Definition 4.10.** *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum. Eine $\sigma$-additive Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to B$ heißt* <u>*B-wertiges Vektormaß.*</u>

Mit einem Vektormaß kann nun auf natürliche Weise ein Maß assoziiert werden.

**Proposition 4.11.** *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum und $\mu$ ein $B$-wertiges Vektormaß. Dann wird durch die Vorschrift*

$$|\mu|(A) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{N} \|\mu(A_k)\|_B : \{A_k\}_{1\le k\le N} \subset \mathcal{A} \text{ ist Zerlegung von } A, N \in \mathbb{N} \right\}$$

*ein Maß $|\mu|$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. $|\mu|$ heißt* <u>*Variation*</u> *von $\mu$.*

*Beweis.* Übungsblatt 5, Aufgabe 3. □

Ist $|\mu|$ endlich und $|\mu| \ll \nu$ für ein endliches Maß $\nu$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$, existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Funktion $f \in L_1(\nu)$ mit $|\mu|(A) = \int_A f d\nu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Das motiviert die Terminologie der nachfolgenden Eigenschaft eines Banachraums.

**Definition 4.12.** *Ein Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ besitzt die* <u>*Radon-Nikodym-Eigenschaft,*</u> *falls für jeden messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, für jedes endliche Maß $\nu$ darauf und für jedes $B$-wertige Vektormaß $\mu$ von endlicher Variation $|\mu|$ und mit $|\mu| \ll \nu$ eine Funktion $f$ aus $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu; B)$ existiert mit*

$$\mu(A) = \int_A f d\nu \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Wir verwenden im Folgenden die in der Literatur übliche Abkürzung RNP für die Radon-Nikodym-Eigenschaft (aus dem Englischen <u>R</u>adon-<u>N</u>ikodym <u>p</u>roperty). Der kommende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnitts.

**Satz 4.13.** *Folgende Aussagen äquivalent.*

*(i) $(B, \|\cdot\|_B)$ besitzt die RNP.*

*(ii) Jedes in $L_1(B)$ beschränkte Martingal $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist f.s. konvergent.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Der Einfachheit halber sei $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N})$. Sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $L_1(B)$-beschränktes Martingal. Wir nehmen vorerst an, dass die Folge $(\|M_n\|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar sei und definieren für jedes $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \int_A M_n d\mathbb{P}.$$

Dabei existiert der Grenzwert auf der rechten Seite, da für $A \in \mathcal{F}_m$ und alle $n \ge m$ $\int_A M_n d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_m) d\mathbb{P} = \int_A M_m d\mathbb{P}$. Ziel ist es nun, $\mu$ zu einem vektorwertigen Maß auf $\mathcal{F}_\infty$ fortzusetzen.

Schritt 1: Wegen $\mathbb{E}\big(M_n \mathbb{1}_A\big) = \mathbb{E}\big(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n)\big)$ zeigen wir zunächst:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n)\big) \text{ existiert.}$$

Das sieht man folgendermaßen ein. Da $M$ ein Martingal ist, ergibt die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung für alle $m < n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m)\big) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\Big(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m) \,\Big|\, \mathcal{F}_m\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m)\mathbb{E}\Big(M_n \,\Big|\, \mathcal{F}_m\Big)\Big) = \mathbb{E}\big(M_m \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m)\big),
\end{aligned}$$

womit $\mathbb{E}(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n)) - \mathbb{E}(M_m \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_m)) = \mathbb{E}(M_n[\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_m)])$. Wegen $|\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_m)| \leq 2$ ist aber

$$\begin{aligned}
&\Big\| \mathbb{E}\big(M_n \big[\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m)\big]\big) \Big\|_B \\
&\qquad \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \|M_n\|_B \mathbb{1}\{\|M_n\|_B > K\} d\mathbb{P} + K\mathbb{E} \,\big|\, \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n\big) - \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m\big) \,\big| \,.
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.9 konvergiert der rechte Term der rechten Seite gegen Null für $m, n \to \infty$ und aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(\|M_n\|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt damit

$$\lim_{m,n\to\infty} \Big\| \mathbb{E}\big(M_n \big[\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_m)\big]\big) \Big\|_B \;=\; 0.$$

Also ist

$$\Big(\mathbb{E}\big(M_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge in $(B, \|\cdot\|_B)$ und somit konvergent.

Schritt 2: Wir zeigen: Die in Schritt 1 fortgesetzte Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to B$ ist $\sigma$-additiv. Nach der noch vorausgesetzten gleichgradigen Intergrierbarkeit von $(\|M_n\|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mathbb{P}(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mu(A)\|_B \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A \|M_n\|_B \, d\mathbb{P} < \varepsilon.$$

Seien nun $A_k$, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, $B_m = \cup_{k=1}^m A_k$ und $B = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Nach der Stetigkeit von unten existiert $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B_m) < \delta(\varepsilon)$, womit $\|\mu(B) - \mu(B_m)\|_B < \varepsilon$. Wegen

$$\mu(B_m) = \lim_{n\to\infty} \int_{B_m} M_n d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^m \lim_{n\to\infty} \int_{A_k} M_n d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^m \mu(A_k)$$

folgt $\mu(B) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. Damit ist $\mu$ als $B$-wertiges Vektormaß identifiziert.

Schritt 3: Wir weisen nach, dass $|\mu|$ endlich ist und $|\mu| \ll \mathbb{P}$. Nach Proposition 4.6 (i) ist $(\|M_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelles Submartingal. Da es nach unserer bisherigen Annahme gleichgradig integrierbar ist, konvergiert es nach dem klassischen Martingalkonvergenzsatz in

$L_1$ gegen einen Grenzwert $w \in L_1$. Nach Definition von $\mu$ und Bemerkung 2.7 (Jensen-Ungleichung für das Bochner-Integral) ist $\|\mu(A)\|_B \leq \lim_n \mathbb{E}(\|M_n\|_B \mathbb{1}_A) = \int_A w d\mathbb{P}$. Dann gilt aber auch für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ mit $A = \cup_{k=1}^m A_k$:

$$\sum_{k=1}^m \|\mu(A_k)\|_B \leq \sum_{k=1}^m \int_{A_k} w d\mathbb{P} = \int_A w d\mathbb{P}.$$

Die Ungleichung bleibt bestehen, wenn links das Supremum über alle disjunkten endlichen Zerlegungen aus $\mathcal{A}$ von A gebildet wird, womit die Variation $|\mu|$ aus Proposition 4.11 endlich ist sowie $|\mu| \ll \mathbb{P}$.

Schritt 4: Nach (i) existiert $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$ mit $\mu(A) = \int_A f d\mathbb{P} \; \forall \, A \in \mathcal{A}$. Wir beweisen nun: $M_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \mathcal{F}_k$ sowie $n \geq k$ gilt $\int_A M_n d\mathbb{P} = \int_A M_k d\mathbb{P} = \mu(A)$, folgt

$$\int_A f d\mathbb{P} = \int_A M_k d\mathbb{P} \;\text{ für alle } A \in \mathcal{F}_k \text{ und alle } k \in \mathbb{N},$$

d.h. $M_k = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.9 konvergiert $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann in $L_1(B)$ gegen $f$ und nach Satz 4.8 dann auch $\mathbb{P}$-f.s.

Schritt 5: Wir zeigen, dass wir auf die Voraussetzung der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(\|M_n\|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ verzichten können. Dazu verwenden wir ein Lokalisierungsargument, um $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem gleichgradig integrierbaren Martingal zu reduzieren. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Stoppzeit

$$\tau_k = \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : \|M_n\|_B > k\} & \text{falls } \sup_n \|M_n\|_B > k \\ \infty & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Damit ist $(M_{n\wedge\tau_k})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal (Übungsblatt 5, Aufgabe 2 (ii)), für welches die Folge $(\|M_{n\wedge\tau_k}\|_B)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist. Denn da $\{\tau_k = m\}$ $\mathcal{F}_m$-messbar für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist, gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_k=m\}}\|M_{\tau_k}\|_B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_k=m\}}\|M_m\|_B) \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_k=m\}}\|M_n\|_B)$ für alle $n \geq m$; durch Summation folgt weiter $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_k\leq n}\|M_{\tau_k}\|_B) \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_k\leq n}\|M_n\|_B)$, was $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau_k<\infty}\|M_{\tau_k}\|_B) \leq \sup_n \mathbb{E}\|M_n\|_B < \infty$ impliziert. Die gleichgradige Integrierbarkeit folgt dann aus $\sup_n \|M_{\tau_k\wedge n}\| \leq \mathbb{1}_{\tau_k<\infty}\|M_{\tau_k}\|_B + k$. Nach Schritt 1–4 konvergiert $(M_{n\wedge\tau_k})_{n\in\mathbb{N}}$ also $\mathbb{P}$-f.s. gegen ein $f_k \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$, d.h. für alle $\omega$ außerhalb einer Ausnahmemenge $N_k$ mit $\mathbb{P}(N_k) = 0$. Sei $N = \cup_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Auf der Menge $C_k \cap N^c$ mit $C_k = \{\omega \in \Omega : \tau_k(\omega) = \infty\}$ gilt $M_{n\wedge\tau_k(\omega)}(\omega) = M_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $M_n(\omega) \to f_k(\omega)$ $(n \to \infty)$ für alle $\omega \in C_k \cap N^c$. Da $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Definition eine aufsteigende Folge von Mengen ist, folgt $f_{k'}\mathbb{1}_{C_k} = f_k\mathbb{1}_{C_k}$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $k' > k$. Dadurch wird eine Funktion $f$ auf $\cup_k(C_k \cap N^c)$ definiert. Die Doobsche Maximalungleichung impliziert $\mathbb{P}(C_k^c) = \mathbb{P}(\sup_n \|M_n\|_B > k) \leq c/k$ mit $c = \sup_n \mathbb{E}\|M_n\|_B < \infty$ nach Voraussetzung, womit $\mathbb{P}(C_k) \to 1$ für $k \to \infty$. Aber damit ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergent.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Siehe [6]. $\square$

Die Äquivalenz des vorangehenden Satzes liefert eine probabilistische Charakterisierung von RNP-Räumen: Es sind solche Banachräume $B$, in denen jedes $L_1(B)$-beschränkte Martingal fast sicher konvergent ist. Beispiel 4.7 und Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5 demonstrieren, dass weder $c_0$ noch $L_1[0,1]$ RNP-Räume sind. Man kann zeigen, dass unter anderem reflexive Räume die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzen.

**Bemerkung 4.14.** *Es gibt noch weitere Klassen von Banachräumen, die durch eine probabilistiche Eigenschaft definiert sind. Eine zentrale Rolle in der unendlichdimensionalen stochastischen Analysis spielen sogenannte UMD-Räume, deren Definition auf Maurey und Pisier zurückgeht. Ein UMD-Raum (aus dem Englischen von unconditional martingale difference) ist ein Banachraum, in dem alle Martingaldifferenzfolgen unbedingt konvergente Reihen bilden. Hierunter fallen auch $L_p$-Räume für $1 < p < \infty$. UMD-Räume ähneln in vielerlei Hinsicht Hilberträumen. Inbesondere lässt sich in diesen die Itô-Isometrie erweitern. Wir kommen hierauf zu geeigneter Zeit zurück.*

Man kann übrigens beweisen, dass UMD-Räume immer reflexiv sind. Jeder UMD-Raum besitzt folglich insbesondere die Radon-Nikodym-Eigenschaft.

## 4.3. *Rückwärtsmartingale

[Dieser Abschnitt wurde von Dr. Johannes Brutsche ausgesprochen dankenswerterweise ausgearbeitet und in Vertretung vorgetragen.]

Wenngleich Rückwärtsmartingale wenig Bedeutung für die stochastische Analysis besitzen, leitet sich aus ihrer Konvergenz das starke Gesetz Banachraum-wertiger Zufallsvariablen ab – ein so wichtiges Resultat, dass wir es an dieser Stelle dennoch präsentieren.

**Definition 4.15.** *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $I$ eine geordnete Indexmenge, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine* ***absteigende*** *Folge von $\sigma$-Algebren in $\mathcal{A}$ und $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum. Eine Familie $M = (M_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen aus $L_1(B)$ heißt Rückwärtsmartingal bezüglich $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, wenn gilt:*

$$\mathbb{E}\big(M_i \,\big|\, \mathcal{F}_j\big) = M_j \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } i, j \in I \text{ mit } i \leq j.$$

Für $f \in L_p(B)$ formulieren nun einen Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale der Form $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_i)_{i\in I}$. Wie üblich beschränken wir uns auf $\mathbb{N}$ als Indexmenge.

**Satz 4.16.** *Seien $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum sowie $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ eine* ***absteigende*** *Folge von Unter-$\sigma$-Algebren von $\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \dots$. Wir setzen $A_\infty = \cap_{n\geq 0}\mathcal{A}_n$. Dann konvergiert für $1 \leq p < \infty$ und für jedes $f \in L_p(B)$ das Rückwärtsmartingal $(\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n))_{n\geq 0}$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $L_p(B)$ gegen $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)$.*

Für den Beweis zeigen wir zunächst folgendes Lemma aus der Hilbertraumtheorie.

**Lemma 4.17.** *Seien $H$ ein Hilbertraum, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teil-Hilberträumen von $H$ und $H_\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}}H_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_n : H \to H_n$ die Orthogonalprojektion auf $H_n$ sowie $P_\infty : H \to H_\infty$ die Orthogonalprojektion auf $H_\infty$. Dann gilt für alle $h \in H$*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n h - P_\infty h\|_H = 0.$$

*Beweis von Lemma 4.17.* Es sei $h \in H$. Wir setzen $h_n = P_n h$ und $g_n = h_n - h_{n-1}$ für $n \geq 1$ mit $h_0 = h$. Dann ist $g_n \perp H_n$, da $P_n g_n = P_n h_n - P_n(P_{n-1}h) = h_n - h_n = 0$. Damit sind die $g_n$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise orthogonal, denn für $m < n$ gilt $g_n = h_n - h_{n-1} \in H_{n-1}$ und $g_m \perp H_m \supset H_{n-1}$. Es folgt $\sum_{n=1}^m \|g_n\|_H^2 = \|\sum_{n=1}^m g_n\|_H^2 = \|(I - P_n)h\|_H^2 \leq \|h\|_H^2$ für alle $m \in \mathbb{N}$ nach der Besselschen Ungleichung und somit $\sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_H^2 \leq \|h\|_H^2 < \infty$. Damit ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(H, \|\cdot\|_H)$, denn $\|h_n - h_m\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^n \|g_n\|_H^2$ nach Pythagoras. Also existiert ein $\bar{h} \in H$ mit $\|h_n - \bar{h}\|_H \to 0$. Nun ist $\bar{h} \in H_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\bar{h} \in H_\infty$. Weiter gilt für alle $h_\infty \in H_\infty$ wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes $0 = \langle h - h_n, h_\infty\rangle_H \to \langle h - \bar{h}, h_\infty\rangle_H$ für $n \to \infty$, womit $h - \bar{h} \perp H_\infty$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Orthogonalprojektion folgt $\bar{h} = P_\infty h$. □

*Beweis von Satz 4.16.* Wir zeigen zuerst die Konvergenz in $L_p(B)$. Wegen (4.2) und der Jensen-Ungleichung für die skalare bedingte Erwartung definiert die Einschränkung eines bedingten Erwartungswertoperators auf $L_p(B)$ immer eine $L_p(B)$-Kontraktion. Damit ist die Familie $(\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}_n))_{n\geq 0}$ der linearen Operatoren $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}_n) : L_p(B) \to L_p(B)$ sogar gleichgradig stetig, womit es genügt, die behauptete $L_p(B)$-Konvergenz auf einer dichten Teilmenge von $L_p(B)$ zu zeigen. Denn gelten $f_m \to_{L_p(B)} f$ für $m \to \infty$ sowie $\lim_n \|\mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_\infty)\|_{L_p(B)} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und bildet man in der nachstehenden Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)\big\|_{L_p(B)} \\
&\quad\leq \big\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_n)\big\|_{L_p(B)} + \big\|\mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_\infty)\big\|_{L_p(B)} \\
&\qquad + \big\|\mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_\infty) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)\big\|_{L_p(B)} \\
&\quad\leq 2\|f_m - f\|_{L_p(B)} + \big\|\mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f_m|\mathcal{A}_\infty)\big\|_{L_p(B)}
\end{aligned}$$

erst den Limes superior $n \to \infty$ auf beiden Seiten und anschließend den Grenzwert $m \to \infty$ auf der rechten Seite, folgt auch $\lim_n \|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)\|_{L_p(B)} = 0$.

Nun ist für $A \in \mathcal{A}$ der Indikator $\mathbb{1}_A$ in $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{A}_n)$ ist die Orthogonalprojektion von $\mathbb{1}_A$ auf $L_2(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P})$. Wegen

$$L_2(\Omega, \mathcal{A}_\infty, \mathbb{P}) = \bigcap_{n\geq 0} L_2(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P})$$

liefert Lemma 4.17 die Konvergenz $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{A}_n) \to_{L_2(\mathbb{P})} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{A}_\infty)$. Das ergibt allerdings $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) \to_{L_2(B)} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)$ für alle $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(B)$-messbaren Treppenfunktionen $f \in F(B)$, und da diese nach Proposition 2.4 dicht in $L_p(B)$ liegen für alle $p \in [1, \infty)$ folgt die $L_2(B)$-Konvergenz für alle $f \in L_2(B)$. Die Aussage für $p \in [1, 2)$ ist dann eine Konsequenz der Ungleichung $\|f - g\|_{L_p(B)} \leq \|f - g\|_{L_2(B)}$ für $f, g \in L_2(B)$; die Behauptung für $p \in (2, \infty)$ folgt aus der Ungleichung $\|f - g\|_{L_p(B)}^p \leq 2^{p-2}\|f - g\|_{L_2(B)}^2$ für $\|f\|_{L_\infty(B)}, \|g\|_{L_\infty(B)} \leq 1$.

Wir beweisen nun die f.s.-Konvergenz. Dafür ersetzen wir zunächst $f$ durch die Differenz $f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_\infty)$. Dann können wir annehmen, dass $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) \to_{L_p(B)} 0$ und damit $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) \to_{L_1(B)} 0$ (nach dem bisher Gezeigten). Setze $f_n = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)$. Zu festem $n \in \mathbb{N}$

und $k \in \mathbb{N}$ sei $M = (M_j)_{j\geq 0}$ gegeben durch

$$M_j = \begin{cases} f_{n+k-j} & \text{für } j \in \{0, 1, \dots, k\} \\ f_n & \text{für } j \geq n. \end{cases}$$

Anwendung von Proposition 4.6 (ii) (Doobsche Maximalungleichung) ergibt für alle $t > 0$

$$t\mathbb{P}\Big(\max_{0\leq j\leq k} \|f_{n-k+j}\|_B > t\Big) = t\mathbb{P}\Big(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|M_j\|_B > t\Big) \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\|M_j\|_B = \mathbb{E}\|f_n\|_B,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Submartingaleigenschaft von $(\|M_j\|_B)_{j\geq 0}$ (Proposition 4.6 (i)) folgt. Dies impliziert aber

$$t\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} \|f_{n-k}\|_B > t\Big) \leq \mathbb{E}\|f_n\|_B,$$

wegen $\mathbb{E}\|f_n\|_B \to 0$ nach dem ersten Beweisteil also $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n) \to 0$ in $(B, \|\cdot\|_B)$ $\mathbb{P}$-f.s. $\square$

**Korollar 4.18** (Starkes Gesetz der großen Zahlen in Banachräumen)**.** *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein W-Raum,* $(B, \|\cdot\|_B)$ *ein Banachraum sowie* $X_1, \dots, X_n$ *unabhängig iid-Zufallsvariablen in* $L_1(B)$*. Dann gilt*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \;\longrightarrow\; \mathbb{E}X_1 \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \text{ und in } L_1(B).$$

*Beweis.* Seien $S_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$ und $\mathcal{A}_n = \sigma(S_n, S_{n+2}, \cdots)$. Aus Symmetriegründen ist $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(X_k|\mathcal{A}_n)$ für alle $1 \leq k \leq n$. Damit ist

$$\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k|\mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{n}\,\Big|\,\mathcal{A}_n\Big) = \frac{S_n}{n}.$$

Satz 4.16 impliziert nun $n^{-1}S_n \to \mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_\infty)$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $L_1(B)$. Nach dem Kolmogorovschen $0-1$-Gesetz ist die terminale $\sigma$-Algebra $\mathcal{T} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ $\mathbb{P}$-trivial. Da der Grenzwert $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_\infty)$ der Folge $(n^{-1}S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{T}$-messbar ist, muss er $\mathbb{P}$-f.s. konstant sein. Die $L_1(B)$-Konvergenz impliziert insbesondere

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_\infty)\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = \mathbb{E}X_1,$$

also $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{A}_\infty) = \mathbb{E}X_1$ $\mathbb{P}$-f.s. $\square$

# 5. Stochastische Integration in unendlicher Dimension

## 5.1. Zylindrischer Wienerprozess und Q-Brownsche Bewegung

Für $n \in \mathbb{N}$ bestehen die $n$ Komponenten des (Standard-) $n$-dimensionalen Wienerprozesses $W = (W(t))_{t\geq 0}$ aus unabhängigen Standard-Brownschen Bewegungen (stBBs). Damit gilt mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für zwei beliebige Elemente $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $s, t \geq 0$ die Identität

$$\mathbb{E}\big(\langle u, W(s)\rangle\langle v, W(t)\rangle\big) = (s \wedge t)\langle u, v\rangle, \tag{5.1}$$

welche das Bildmaß des stetigen zentrierten Gaußprozesses eindeutig charakterisiert. Diese Charakterisierung soll nun von $\mathbb{R}^n$ auf einen beliebigen separablen Hilbertraum $H$ erweitert werden, um einen unendlichdimensionalen Wienerprozess zu definieren.

- Ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $H$, so wäre ein naheliegender Ansatz, den Wienerprozess als Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} W_n e_n$ für eine Familie $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger stBBs zu definieren. Das Problem dabei ist, dass für jedes $t > 0$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)e_n$ $\mathbb{P}$-f.s. <u>nicht</u> konvergent in $(H, \|\cdot\|_H)$ ist.

- Satz 3.11 impliziert sogar, dass es für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum $(H, \|\cdot\|_H)$ gar kein Gaußmaß $\mu$ darauf geben kann mit $\int \langle u, x\rangle_H \langle v, x\rangle_H d\mu(x) = \langle u, v\rangle_H \;\forall\, u, v \in H$. Denn dann müsste $\hat{C}_\mu : H \to H$ die Identität sein, aber diese ist in unendlichdimensionalen Räumen nicht kompakt und damit nicht Spurklasse.

Daher die folgende Idee: Wir fassen die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)e_n$ auf als Elemente eines größeren Hilbertraumes $H' \supset H$, für welchen die Einbettung $\iota : H \to H'$ einen Hilbert-Schmidt-Operator definiert. Ein solches $H'$ existiert immer, denn bspw. mit

$$\|\cdot\|_{H'}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \langle \cdot, e_n\rangle_H^2$$

kann man $H'$ als $\|\cdot\|_{H'}$-Vervollständigung von $H$ definieren. Offenbar ist $(ne_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $H'$. Für jedes $t \geq 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)e_n$ dann im Bochnerraum $L_2(H')$ und damit $\mathbb{P}$-f.s. in $(H', \|\cdot\|_{H'})$ nach dem Satz von Itô-Nisio. Die nächste Proposition garantiert, dass der Grenzwert als Prozess in $t \in [0, \infty)$ auch stetige Pfade hat.

**Proposition 5.1.** *Seien $H, H'$ sowie $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} W_n e_n$ $\mathbb{P}$-f.s. in $\mathcal{C}([0,\infty); H')$ und in $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}([0,T]; H'))$, wobei $\mathcal{C}([0,\infty); H')$ versehen ist mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.*

*Beweis.* Seien $T > 0$ beliebig, $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die $N$-te Partialsumme $S_N = \sum_{n=1}^{N} W_n e_n$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig und es gilt für alle $M < N$ nach Proposition 4.6 (iii) (Doobsche Maximalungleichung in der $L_2$-Fassung)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\|S_N - S_M\|^2_{\mathcal{C}([0,T];H')}\big) &= \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|S_N(t) - S_M(t)\|^2_{H'}\Big) \\ &\leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big\|\sum_{n=M+1}^{N} W_n(t)e_n\Big\|^2_{H'} \\ &= 4 \sum_{n=M+1}^{N} \mathbb{E}\|W_n(T)e_n\|^2_{H'} = 4T \sum_{n=M+1}^{N} \|e_n\|^2_{H'}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei wir bei der ersten Gleichheit in (5.2) neben der Submartingaleigenschaft verwendet haben, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in $H'$ eine orthogonale Familie ist. Damit ist $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}([0,T]; H'))$-Cauchyfolge, also konvergent. Nach dem Satz von Itô-Nisio konvergiert sie dann auch $\mathbb{P}$-f.s. im Banachraum $\mathcal{C}([0,T]; H')$. Die Erweiterung der Konvergenz auf $\mathcal{C}([0,\infty); H')$ ist Aufgabe 1(ii) auf Übungsblatt 7. □

**Definition 5.2.** *Seien $H$ ein separabler Hilbertraum und $H' \supset H$ wie oben. Ein stetiger $H'$-wertiger zentrierter Gaußprozess $W = (W(t))_{t \geq 0}$, der*

$$\mathbb{E}\big(\langle h, W(s)\rangle_{H'} \langle k, W(t)\rangle_{H'}\big) = (s \wedge t)\langle \iota^* h, \iota^* k\rangle_H$$

*für alle $s, t \geq 0$ und für alle $h, k \in H'$ erfüllt, heißt zylindrischer Wienerprozess auf $H$.*

Hierbei bezeichnet $\iota^*$ den zur Inklusion $\iota$ adjungierten Operator.

**Bemerkung 5.3.** *Das Gaußmaß $\mu$ auf $(H', \mathcal{B}(H'))$ mit Kovarianzoperator $C_\mu = \iota\iota^*$ hat $H$ als Cameron-Martin-Raum, d.h. es gilt $H_\mu = H$ ($\rightarrow$ Übungsblatt 6, Aufgabe 4).*

Ist $W = (W_t)_{t \geq 0}$ ein zylindrischer Wienerprozess, so lässt sich $W_t$ für jedes $t \geq 0$ mittels der Rieszdarstellung als stetige Linearform $\langle \cdot, W_t\rangle_{H'}$ auf $H'$ auffassen, die nach dem Satz von Fernique mit einem Element aus $L^2(H', \mathcal{B}(H'), \mathbb{P}^{W_t})$ identifiziert werden kann. Sind $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\|\cdot\|_{H'}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} \langle \cdot, e_n\rangle_H^2$ wie oben, so ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} F_N : (H, \|\cdot\|_H) &\longrightarrow (H', \|\cdot\|_{H'}) \\ h &\longmapsto \sum_{n=1}^{N} n^2 \langle h, e_n\rangle_H e_n = F_N(h) \end{aligned}$$

stetig und linear, womit $W_t$ für jedes $t \geq 0$ eine (zufällige) stetige lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \langle F_N(\cdot), W_t\rangle_{H'} : (H, \|\cdot\|_H) &\longrightarrow L_2(\mathbb{P}) \\ h &\longmapsto \langle F_N(h), W_t\rangle_{H'} = \sum_{n=1}^{N} \langle h, e_n\rangle_H W_n(t) \end{aligned}$$

definiert ($F_N$ bildet im Grenzwert $N \to \infty$ allerdings keine (!) Einbettung von $H$ in $H'$). Wegen $\sum_{n=1}^{N} \langle h, e_n\rangle_H W_n(t) \to \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_H W_n(t) =: B_t(h) \sim \mathcal{N}(0, t\|h\|_H^2)$ in $L_2(\mathbb{P})$ und $\mathbb{P}$-f.s. nach dem Satz von Itô-Nisio sowie insbesondere

$$\mathbb{E}\big(B_s(h) B_t(k)\big) = (s \wedge t)\langle h, k\rangle_H \quad \text{für alle } h, k \in H$$

in Analogie zum endlichdimensionalen Fall (5.1), finden sich in der Literatur alternative äquivalente Charakterisierungen des zylindrischen Wienerprozesses, die ihn durch seine lineare Operation auf $H$ charakterisieren, wodurch sehr elegant auf $H'$ als Bildraum des Prozesses in der Formulierung verzichtet werden kann (Übungsblatt 6, Aufgabe 3). Allerdings mag das die nicht (!) zutreffende Assoziation forcieren, dass der zylindrische Wienerprozess selbst $H$-wertig ist. Zudem muss seine Existenz auch dennoch nachgewiesen werden.

**Definition 5.4.** *Seien $(H, \|\cdot\|_H)$ ein separabler Hilbertraum und $Q : H \to H$ ein symmetrischer positiv semidefiniter Spurklasse-Operator. Eine Q-Brownsche Bewegung in H ist ein stetiger Prozess $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to H$ mit $W_0 = 0$ und unabhängigen Zuwächsen, so dass für alle $0 \leq s \leq t < \infty$ die Verteilung $\mathcal{L}(W_t - W_s)$ ein zentriertes Gauß-W-Maß mit Kovarianzoperator $(t - s)Q$ ist.*

**Bemerkung 5.5.** *In diesem Sinne ist der zylindrische Wienerprozess auf $H$ aus Definition 5.2 eine $\iota\iota^*$-Brownsche Bewegung auf $(H', \|\cdot\|_{H'})$.*

Für selbstadjunierte kompakte Operatoren in Hilberträumen sieht der Spektralsatz genauso aus wie im Endlichdimensionalen, bis darauf, dass die Spektraldarstellung eine höchstens abzählbare Summe enthalten kann. Sind $W$ eine $Q$-Brownsche Bewegung auf $(H, \|\cdot\|_H)$ sowie $(e_n)_{n\geq 1}$ eine (endliche oder abzählbar unendliche) Orthonormalbasis von $(\ker(Q))^\perp$ mit $Qe_n = \lambda_n e_n$ für die Eigenwerte $\lambda_n \in (0,\infty)$, so bildet $(\langle \cdot, e_n/\sqrt{\lambda_n}\rangle_H)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalbasis von $(\overline{H^*}, \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{P}^{W_1})})$, wobei $\overline{H^*}$ den $L_2(\mathbb{P}^{W_1})$-Abschluss von $H^*$ bezeichnet. Satz 3.21 ergibt dann die Karhunen-Loève-Entwicklung

$$W(\cdot) = \sum_{n\geq 1} \langle W(\cdot), e_n/\sqrt{\lambda_n}\rangle_H e_n \sqrt{\lambda_n},$$

wobei im Falle $\dim((\ker(Q))^\perp) = \infty$ der Satz die Konvergenz der Reihe zunächst nur punktweise für jedes $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $L_2(H)$ ergibt; die Prozess-Konvergenz in $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}([0,T]; H))$ sowie $\mathbb{P}$-f.s. im metrischen Raum $\mathcal{C}([0,\infty); H)$ folgt dann mittels Doobscher Maximalungleichung vollkommen analog zum Beweis von Proposition 5.1. Da $\langle W(\cdot), e_n/\sqrt{\lambda_n}\rangle_H$, $n \geq 1$, unabhängige stBBs sind (die definierenden Eigenschaften der stBB sind leicht zu überprüfen), liefert die Darstellung auf der rechten Seite unmittelbar die Konstruktion einer $Q$-Brownschen Bewegung ($\rightarrow$ Übungsblatt 7, Aufgabe 3), nämlich als $\mathcal{C}([0,\infty); H)$-Grenzwert $\mathbb{P}$-f.s und in $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}([0,T]; H))$ für alle $T > 0$ von $\sum_{n\geq 1} W_n e_n \sqrt{\lambda_n}$ für eine Familie unabhängiger stBBs $(W_n)_{n\geq 1}$.

**Lemma 5.6.** *Eine $Q$-Brownsche Bewegung auf $(H, \|\cdot\|_H)$ bildet ein $L_2(H)$-Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

*Beweis.* Übungsblatt 7, Aufgabe 1 (i). □

Für eine $Q$-Brownsche Bewegung $W$ als Integrator soll im nächsten Abschnitt das stochastische Integral definiert werden. Insbesondere um später zufällige Anfangsbedingungen zulassen zu können, ist es sinnvoll, eine größere Filtration als die kanonische zu betrachten.

**Definition 5.7.** *Eine $Q$-Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist eine $Q$-Brownsche Bewegung $W$, die $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert ist und deren Zuwächse $W_t - W_s$ unabhängig sind von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \leq s \leq t < \infty$.*

In der endlichdimensionalen stochastischen Analysis ist es an verschiedenen Stellen zweckmäßig, wenn die Filtration den sogenannten "üblichen Bedingungen" genügt: $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist rechtsstetig und vollständig. Rechtsstetigkeit bedeutet $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ für alle $t \geq 0$, Vollständigkeit heißt $\{A' \subset \Omega : \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } A' \subset A \text{ und } \mathbb{P}(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$. Für unsere Zwecke reicht es auch, wenn $\{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$ anstelle der Vollständigkeit gilt. Letzteres erlaubt, den Prozess auf einer $\mathbb{P}$-Nullmenge aus $\mathcal{A}$ zu modifizieren, ohne die Adaptiertheit zu verletzen. Die Rechtsstetigkeit impliziert im skalaren Fall beispielsweise, dass jedes zeitstetige $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal eine càdlàg-Version besitzt. Wir verwenden sie hier beim Lokalisierungsschritt der Itô-Konstruktion im nächsten Abschnitt.

Die kanonische Filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ einer $Q$-Brownschen Bewegung $W$ ist allerdings – trotz stetiger Pfade von $W$ – nicht rechtsstetig. Für die skalare stBB zeigt Blumenthals $0-1$-Gesetz aber gerade, dass sich $\mathcal{F}_t^W$ und $\cap_{s>t}\mathcal{F}_s^W$ nur um Nullmengen unterscheiden. Dieses Ergebnis legt das nächste Resultat nahe.

**Proposition 5.8.** *Gegeben sei eine $Q$-Brownsche Bewegung bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ definiert durch*

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \sigma(\mathcal{F}_s \cup \{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = 0\}), \quad t \geq 0.$$

*Dann ist der Prozess auch eine $Q$-Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$.*

*Beweis.* Übungsblatt 7, Aufgabe 2. □

Die Proposition garantiert, dass die Voraussetzung obiger Bedingungen an die Filtration mit keiner Einschränkung an die $Q$-Brownsche Bewegung verbunden ist. Insbesondere bleibt die Martingaleigenschaft beim Übergang zu $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ erhalten.

## 5.2. Das stochastische Integral in Hilberträumen

Für den Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration in $\mathcal{A}$ mit $\{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$, $T > 0$ eine feste Zahl, $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$ und $\mathbb{P}_T = \lambda \otimes \mathbb{P}$. Außerdem seien $(H, \|\cdot\|_H)$, $(U, \|\cdot\|_U)$ separable Hilberträume, $(B, \|\cdot\|_B)$ ein separabler Banachraum; für zwei Banachräume $(B_1, \|\cdot\|_{B_1})$ und $(B_2, \|\cdot\|_{B_2})$ bezeichne $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ den Raum der linearen Operatoren von $B_1$ nach $B_2$, $L(B_1, B_2)$ den Teilraum der stetigen linearen Operatoren. Versehen mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{L(B_1,B_2)}$ ist $L(B_1, B_2)$ selbst ein Banachraum.

Das stochastische Integral wird in mehreren Stufen entwickelt. Wir starten hier mit dem stochastischen Integral in Hilberträumen, d.h. für $L(U, H)$-wertige Integranden, bezüglich einer $Q$-Brownschen Bewegung auf $U$.

**Proposition 5.9.** *Sei $\mathcal{M}_T^2 = \mathcal{M}_T^2(B)$ der Raum der stetigen $L_2(B)$-Martingale $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Dann definiert*

$$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2} = \mathbb{E}\big(\|M_T\|_B^2\big)^{1/2}$$

*eine Norm auf $\mathcal{M}_T^2$ und $(\mathcal{M}_T^2, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2})$ ist ein Banachraum.*

*Beweis.* Nach Proposition 4.6 (i) ist $(\|M_t\|_B^2)_{0\leq t\leq T}$ ein Submartingal. Proposition 4.6 (iii) (Doobsche Maximalungleichung in der $L_2$-Version) impliziert dann $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} \|M_t\|_B^2) \leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\|M_t\|_B^2) = 4\mathbb{E}(\|M_T\|_B^2)$, womit

$$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2} = 0 \iff M = 0.$$

Die anderen Eigenschaften der Norm sind die von $\|\cdot\|_{L_2(B)}$. Da $\mathcal{C}([0, T]; B)$ ein Banachraum ist, ist auch $L_2(\mathcal{C}([0, T]; B))$ nach Lemma 2.3 vollständig. $\mathcal{M}_T^2$ ist darin abgeschlossen, denn die bedingte Erwartung ist bereits stetig in $L_1(B)$, womit der $L_2(\mathcal{C}([0, T]; B))$-Grenzwert einer Folge von Martingalen wieder ein Martingal sein muss. □

Wir beschränken uns der Klarheit der Darstellung wegen zunächst auf ein Intervall $[0,T]$ – unter anderem, weil $\mathcal{C}([0,T];B)$ im Gegensatz zu $\mathcal{C}([0,\infty);B)$ ein Banachraum ist und uns somit die Bochnerräume $L_p(\mathcal{C}([0,T];B))$ zur Verfügung stehen.

**Bemerkung 5.10.** *Natürlich betrachtet man später die Prozesse und insbesondere den Raum der $L_2(H)$-beschränkten stetigen Martingale $\mathcal{M}^2$ für einen separablen Hilbertraum $(H, \|\cdot\|_H)$ auf ganz $\mathbb{R}_+$. An dieser Stelle können wir zum Einsatz bringen, dass reflexive Räume die Radon-Nikodym-Eigenschaft 4.12 besitzen. Denn dann konvergiert ein $L_2(H)$-beschränktes Martingal nach Satz 4.13 $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen Grenzwert $M_\infty$; die aus der $L_2(H)$-Beschränktheit folgende gleichgradige Integrierbarkeit impliziert dann mit der f.s.-Konvergenz auch die $L_2(H)$-Konvergenz. Auf $\mathcal{M}^2$ definiert $\|M\|_{\mathcal{M}^2} = (\mathbb{E}\|M_\infty\|_H^2)^{1/2}$ wieder nach der Doob-Ungleichung eine Norm und $\mathcal{M}^2$ wird damit zum Banachraum (sogar zu einem Hilbertraum).*

Das Itô-Integral in (potentiell) unendlicher Dimension wird in Analogie zum skalaren Fall definiert.

### Das Schema der Itô-Konstruktion

(i) Definition eines elementaren Integrals bezüglich einer $Q$-Brownschen Bewegung $W$ auf $(U, \|\cdot\|_U)$ mittels Martingaltransformation

$$I : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_T^2(H), \quad \phi \mapsto \int_0^\cdot \phi(s)dW_s$$

für eine Klasse $\mathcal{E}$ elementarer $L(U,H)$-wertiger Integranden.

(ii) $\mathcal{E}$ kann mit einer Halbnorm versehen werden, die $I : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_T^2$ zu einer Isometrie macht. Da $\mathcal{M}_T^2$ nach Proposition 5.9 vollständig ist, lässt sich $I$ stetig auf die Vervollständigung $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ (bzw. dem entsprechenden Quotientenraum) fortsetzen.

(iii) $\overline{\mathcal{E}}$ wird explizit dargestellt (Eindeutigkeit bis auf isometrische Isomorphie).

(iv) Das stochastische Integral wird mittels Lokalisierung erweitert. Hier werden die vorausgesetzten Bedingungen an die Filtration verwendet.

Wir beginnen (i) mit dem $L(U,H)$-wertigen Analogon elementarer Treppenprozesse.

**Definition 5.11.** *Ein elementarer Prozess ist ein $L(U,H)$-wertiger $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess $(\phi(t))_{t\in[0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ folgender Form: Es gibt $k \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \dots t_k = T$ und $\phi_m$ $\mathcal{F}_{t_m}$-messbar, $m = 0, \dots, k-1$, mit*

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(t), \quad t \in [0,T],$$

*wobei $\phi_0, \dots, \phi_{k-1} : \Omega \to L(U,H)$ jeweils nur endlich viele Werte in $L(U,H)$ annehmen. $\phi(0)$ wird dabei als Nullabbildung nach $H$ aufgefasst, d.h. $\phi(0)(u) = 0 \in H$ für alle $u \in U$.*

Die elementaren Prozesse bilden einen Vektorraum linksseitig stetiger adaptierter Prozesse, der mit $\mathcal{E}$ bezeichnet wird.

Für eine $Q$-Brownsche Bewegung $W$ auf $(U, \|\cdot\|_U)$ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ wird das stochastische Integral über einen Prozess $\phi \in \mathcal{E}$ nun durch Martingaltransformation definiert:

$$I(\phi)(t) = \int_0^t \phi(s) dW_s := \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}\big), \quad t \in [0,T]. \tag{5.3}$$

Die rechte Seite ist dabei offenbar unabhängig von der speziellen Darstellung des elementaren Prozesses $\phi \in \mathcal{E}$.

**Proposition 5.12.** *Das elementare stochastische Integral in (5.3) definiert eine lineare Abbildung $I : \mathcal{E} \to \mathcal{M}_T^2$.*

*Beweis.* Die Linearität ist klar. Wir zeigen, dass für $\phi \in \mathcal{E}$ das Bild $I(\phi)$ in $\mathcal{M}_T^2$ liegt. Sei $\phi \in \mathcal{E}$ gegeben durch

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(t), \quad t \in [0,T].$$

Wegen der pfadweisen Stetigkeit $W_{\cdot \wedge t_m}(\omega) \in \mathcal{C}([0,T]; U)$ und $\phi_m(\omega) \in L(U,H)$ für alle $\omega \in \Omega$ ist $(\int_0^t \phi(s) dW_s)_{t \in [0,T]}$ $\mathcal{C}([0,T]; H)$-wertig. Weiter ist für alle $t \in [0,T]$

$$\big\| \phi_m \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}\big) \big\|_H \leq \|\phi_m\|_{L(U,H)} \big\| W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t} \big\|_U.$$

Da $\phi_m : \Omega \to L(U,H)$ nach Voraussetzung nur endlich viele Werte annimmt, ist $\sup_{\omega \in \Omega} \|\phi_m(\omega)\|_{L(U,H)} < \infty$ für jedes $0 \leq m \leq k-1$, womit nach dem Satz von Fernique

$$\mathbb{E} \Big\| \int_0^t \phi(s) dW_s \Big\|_H^2 < \infty \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Bleibt zu zeigen, dass der Prozess $(\int_0^t \phi(s) dW_s)_{t \in [0,T]}$ ein Martingal ist. Seien $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$ und $m(s)$ derjenige Index mit $t_{m(s)} < s \leq t_{m(s)+1}$ in der Darstellung von $\phi$. Für $\phi_m(\Omega) = \{L_1^m, \ldots, L_{l_m}^m\}$ mit einem $l_m \in \mathbb{N}$ sind der Adaptiertheit wegen die Urbilder $\phi_m^{-1}(L_j^m) \in \mathcal{F}_{t_m}$, $1 \leq j \leq l_m$. Für $m > m(s)$ gilt $A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m) \in \mathcal{F}_{t_m}$ für $j = 1, \ldots, l_m$, und die Unabhängigkeit der Zuwächse $W_{t_{m+1}} - W_{t_m}$ von $\mathcal{F}_{t_m}$ impliziert

$$\int_{A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}\big) d\mathbb{P} = 0 = \int_{A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m \wedge s}\big) d\mathbb{P}.$$

Im Falle $m = m(s)$ sind $A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m) \in \mathcal{F}_s$ für $j = 1, \ldots, l_m$, sowie $t_m \wedge t = t_m$ wegen $t_m < s$ und $t \geq s$, womit nach der Martingaleigenschaft von $W$

$$\begin{aligned}\int_{A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m}\big) d\mathbb{P} &= \int_{A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_s - W_{t_m}\big) d\mathbb{P} \\ &= \int_{A \cap \phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m \wedge s}\big) d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Für alle $m < m(s)$ ist schließlich $t_m \wedge t = t_m = t_m \wedge s$ sowie $t_{m+1} \wedge t = t_{m+1} = t_{m+1} \wedge s$ und folglich

$$\int_A \phi_m(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t})d\mathbb{P} = \int_A \phi_m(W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m\wedge s})d\mathbb{P}.$$

Mithilfe der Zerlegung

$$\int_A \Big(\sum_{m=0}^{k-1} \phi_m\big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}\big)\Big)d\mathbb{P} = \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{l_m} L_j^m \int_{A\cap\phi_m^{-1}(L_j^m)} \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}\big)d\mathbb{P},$$

wobei gemäß Lemma 2.9 jeweils das Bochnerintegral mit $L_j^m \in L(U,H)$ vertauscht wurde, ergibt sich insgesamt also die Identität

$$\int_A \Big(\int_0^t \phi(u)dW_u\Big)d\mathbb{P} = \int_A \Big(\int_0^s \phi(u)dW_u\Big)d\mathbb{P}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_s$. Damit ist der Prozess $(\int_0^t \phi(s)dW_s)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal. □

Es bezeichne $S_2(U,H)$ den Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren von $U$ nach $H$. Versehen mit dem Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt ist dieser selbst ein Hilbertraum. Sind $Q : U \to U$ wie oben und $(e_n)_{n\geq 1}$ eine (endliche oder abzählbar unendliche) Orthonormalbasis von $(\ker(Q))^\perp \subset U$ mit $Qe_n = \lambda_n e_n$ für die Eigenwerte $\lambda_n \in (0,\infty)$, so ist

$$Q^{1/2}(\cdot) = \sum_{n\geq 1} \sqrt{\lambda_n}\langle \cdot, e_n\rangle_U e_n$$

symmetrisch, positiv semidefinit und Hilbert-Schmidt. Es gilt $Q^{1/2}\circ Q^{1/2} = Q$, und für $L \in L(U,H)$ ist die Komposition $L\circ Q^{1/2}$ in $S_2(U,H)$, denn

$$\sum_{n\geq 1} \|L\circ Q^{1/2}e_n\|_H^2 = \sum_{n\geq 1}\lambda_n\|Le_n\|_H^2 \leq \|L\|_{L(U,H)}^2 \operatorname{tr}(Q) < \infty.$$

(ii) Mithilfe des Hilbert-Schmidt-Operators $Q^{1/2}$ soll nun eine Norm auf einem geeigneten Quotientenraum von $\mathcal{E}$ definiert werden. Für $\phi \in \mathcal{E}$ sei

$$\|\phi\|_T^2 = \mathbb{E}\int_0^T \|\phi(s)\circ Q^{1/2}\|_{S_2(U,H)}^2 ds. \tag{5.4}$$

$\|\cdot\|_T$ definiert eine (Bochner-)Halbnorm auf $\mathcal{E}$.

**Proposition 5.13** (Itô-Isometrie)**.** *Mit $\|\cdot\|_T$ aus (5.4) gilt*

$$\Big\| \int_0^\cdot \phi(s)dW_s\Big\|_{\mathcal{M}_T^2} = \|\phi\|_T$$

*für alle $\phi \in \mathcal{E}$.*

*Beweis.* Mit $\Delta_m := W_{t_{m+1}} - W_{t_m}$ ist für $\phi(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(t)$, $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^\cdot \phi(s) dW_s \Big\|^2_{\mathcal{M}_T^2} &= \mathbb{E} \Big\| \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \Delta_m \Big\|^2_H \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{E}\|\phi_m \Delta_m\|_H^2 \; + \; 2 \sum_{0 \le m < n \le k-1} \mathbb{E}\langle \phi_m \Delta_m, \phi_n \Delta_n \rangle_H . \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass der erste Term in (5.5) gleich $\|\phi\|_T^2$ ist. Ist $(f_k)_{k\ge1}$ eine Orthonormalbasis von $H$, so gilt nach der Parseval-Gleichung und dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E}\|\phi_m \Delta_m\|_H^2 = \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\langle \phi_m \Delta_m, f_k \rangle_H^2 = \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\mathbb{E}\big( \langle \phi_m \Delta_m, f_k \rangle_H^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_m} \big). \qquad (5.6)$$

Mit einer Orthonormalbasis $(e_k)_{k\ge1}$ von $U$ ergibt sich mit der adjungierten Abbildung $\phi_m^* : H^* = H \to U^* = U$ die Darstellung

$$\phi_m^* f_l = \sum_{k\ge1} \langle \phi_m^* f_l, e_k \rangle_U e_k = \sum_{k\ge1} \langle f_l, \phi_m e_k \rangle_H e_k .$$

Als punktweiser Grenzwert Bochner-messbarer Funktionen in $(U, \|\cdot\|_U)$ ist die rechte Seite und damit auch $\phi_m^* f_l$ Bochner-messbar. Da $\mathbb{E}(\langle \Delta_m, u \rangle_U^2) = (t_{m+1} - t_m) \langle Qu, u \rangle_U^2$ für jedes $u \in U$, $\Delta_m$ unabhängig ist von $\mathcal{F}_{t_m}$ und $\phi_m^* f_l \in \mathcal{F}_{t_m}$, folgt weiter

$$\mathbb{E}\big( \langle \Delta_m, \phi_m^* f_l \rangle_U^2 \,\big|\, \mathcal{F}_{t_m} \big) = (t_{m+1} - t_m) \langle Q\phi_m^* f_l, \phi_m^* f_l \rangle_U^2 .$$

Wegen $\langle \phi_m \Delta_m, f_k \rangle_H^2 = \langle \Delta_m, \phi_m^* f_k \rangle_U^2$ ergibt Einsetzen in (5.6) mit Symmetrie von $Q^{1/2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\phi_m \Delta_m\|_H^2 &= (t_{m+1} - t_m) \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\langle Q\phi_m^* f_l, \phi_m^* f_l \rangle_U^2 \\ &= (t_{m+1} - t_m) \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\langle Q^{1/2}\phi_m^* f_l, Q^{1/2}\phi_m^* f_l \rangle_U^2 \\ &= (t_{m+1} - t_m) \mathbb{E} \big\| Q^{1/2} \circ \phi_m^* \big\|^2_{L_2(H^*,U^*)} \\ &= (t_{m+1} - t_m) \mathbb{E} \big\| \phi_m \circ Q^{1/2} \big\|^2_{S_2(U,H)},\end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Identität verwendet haben, dass die Hilbert-Schmidt-Norm eines Operators mit der seines Adjungierten übereinstimmt. Also ist

$$\sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{E}\|\phi_m \Delta_m\|_H^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s) \circ Q^{1/2}\|^2_{S_2(U,H)} ds = \|\phi\|_T^2 .$$

Bleibt zu zeigen, dass die zweite Summe in (5.5) verschwindet. Aber das ist eine Konsequenz aus der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung. Denn $\mathbb{E}\langle u, \Delta_n \rangle_U = 0$ für alle $u \in U$, also ist wegen der Unabhängigkeit von $\Delta_n$ und $\mathcal{F}_{t_n}$ für $m < n$ wie oben

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\langle \phi_m \Delta_m, \phi_n \Delta_n \rangle_H &= \mathbb{E}\mathbb{E}\big( \langle \phi_m \Delta_m, \phi_n \Delta_n \rangle_H \,\big|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}} \big) \\ &= \mathbb{E}\mathbb{E}\big( \langle \phi_n^* \phi_m \Delta_m, \Delta_n \rangle_U \,\big|\, \mathcal{F}_{t_{n-1}} \big) = 0.\end{aligned}$$

□

Für $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{E}$ gilt

$$\|\phi - \tilde{\phi}\|_T = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\phi - \tilde{\phi})_{|Q^{1/2}U} = 0 \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Die Menge $\{\phi \in \mathcal{E} : \|\phi\|_T = 0\}$ bildet einen linearen Teilraum von $\mathcal{E}$. Durch Übergang von $\mathcal{E}$ zum Quotientenraum der entsprechenden Äquivalenzklassen wird aus $\|\cdot\|_T$ eine Norm. Den Quotientenraum bezeichnen wir nach wie vor mit $\mathcal{E}$. Auf diesem ist

$$I : (\mathcal{E}, \|\cdot\|_T) \longrightarrow \left(\mathcal{M}_T^2, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2}\right)$$

eine Isometrie und kann nach dem Fortstetzungssatz eindeutig isometrisch auf die Vervollständigung $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ bezüglich $\|\cdot\|_T$ fortgesetzt werden.

(iii) Das nächste Ziel ist es, die Vervollständigung $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ zu charakterisieren. Es erweist sich dafür als zweckmäßig, einen weiteren separablen Hilbertraum $(U_0, \|\cdot\|_{U_0})$ einzuführen. Ist wie oben $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalbasis von $(\ker(Q))^\perp \subset U$ mit $Qe_n = \lambda_n e_n$ für die Eigenwerte $\lambda_n \in (0, \infty)$, bezeichnen wir

$$Q^{-1/2}(\cdot) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \langle \cdot, e_n \rangle_U e_n$$

als verallgemeinerte Inverse von $Q^{1/2}$. Auf dem linearen Teilraum $U_0 = Q^{1/2}(U)$ von $U$ definiert dann $\langle u_0, v_0 \rangle_{U_0} = \langle Q^{-1/2}u_0, Q^{-1/2}v_0 \rangle_U$ für $u_0, v_0 \in U_0$ ein Skalarprodukt. Mit der von dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_0}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{U_0}$ bildet $(U_0, \|\cdot\|_{U_0})$ einen separablen Hilbertraum. Mit diesem gilt $\|L\|_{S_2(U_0,H)} = \|L \circ Q^{1/2}\|_{S_2(U,H)}$ für alle $L \in S_2(U_0, H)$, denn $(Q^{1/2}e_n)_{n\geq 1}$ ist eine Orthonormalbasis von $U_0$. Es ist also

$$\|\phi\|_T^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|\phi(s)\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds.$$

Wir erinnern an die Notation $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$ und $\mathbb{P}_T = \lambda \otimes \mathbb{P}$. Um $\overline{\mathcal{E}}$ mit einem $L_2$-Bochnerraum über dem Maßraum $(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T)$ identifizieren zu können, benötigen wir die in Null ergänzte von den elementaren Prozessen $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra auf $\Omega_T$.

**Definition 5.14.** *Die $\sigma$-Algebra $\mathcal{P}_T = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$ mit*

$$\mathcal{C} = \Big\{(s,t] \times F_s : 0 \leq s < t \leq T, F_s \in \mathcal{F}_s\Big\} \cup \Big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\Big\} \tag{5.7}$$

*wird als vorhersagbare $\sigma$-Algebra (engl. predictable $\sigma$-field) bezeichnet.*

Für den separablen Hilbertraum $S_2(U_0, H)$ nennt man eine $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(S_2(U_0,H))$-messbare Abbildung $Y : \Omega_T \to S_2(U_0, H)$ entsprechend auch vorhersagbar.

**Proposition 5.15.** $\mathcal{N}_W^2 := L_2\big(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; S_2(U_0,H)\big)$ *ist eine Darstellung von* $\overline{\mathcal{E}}$.

*Beweis.* Nach Konstruktion ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}_W^2$ und nach Lemma 2.3 ist der Bochnerraum vollständig. Damit reicht zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ dicht liegt in $\mathcal{N}_W^2$. Nach Proposition 2.4 liegen die Treppenfunktionen $\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k} \otimes L_k$ mit $A_k \in \mathcal{P}_T$ und $L_k \in S_2(U_0, H)$, $k = 1, \ldots, N$,

$N \in \mathbb{N}$, dicht in $\mathcal{N}_W^2$. Insofern muss lediglich bewiesen werden, dass jede Funktion der Gestalt $\mathbb{1}_A \otimes L$ mit $A \in \mathcal{P}_T$ und $L \in S_2(U_0, H)$ bezüglich $\|\cdot\|_T$ durch Funktionen aus $\mathcal{E}$ beliebig gut approximiert werden kann. Für $\mathcal{C}$ aus (5.7) seien dazu

$$\mathcal{A} = \left\{A = \cup_{k=1}^N A_k : \ A_k \in \mathcal{C} \text{ für } k = 1, \dots, N, \ N \in \mathbb{N}\right\}$$

das $\cap$-stabile Mengensystem endlicher Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{C}$ sowie

$$\mathcal{D} = \Big\{A \in \mathcal{P}_T : \text{ Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert } \Lambda \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathbb{P}_T(\Lambda \vartriangle A) < \varepsilon\Big\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem (Übungsblatt 7, Aufgabe 3(i)). Wegen $\mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}_T$ und $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_T$ folgt $\mathcal{P}_T = \mathcal{D}$. Nun lässt sich aber jede Menge $A \in \mathcal{A}$ als endliche Vereinigung disjunkter $\mathcal{C}$-Mengen schreiben. Ist also $\phi = \mathbb{1}_A \otimes L \in \mathcal{N}_W^2$ mit $A \in \mathcal{P}_T$ und $L \in S_2(U_0, H)$, so existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sowie paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{C}$ mit $\mathbb{P}_T(A \vartriangle \cup_{k=1}^N A_k) < \varepsilon$. Mit $\mathbb{1}_{\cup_k A_k} = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k}$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathbb{1}_A \otimes L - \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k} \otimes L\Big\|_T^2 &= \mathbb{E}\int_0^T \Big\|\Big(\mathbb{1}_A - \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k}\Big) \otimes L\Big\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds \\
&= \|L\|_{S_2(U_0,H)}^2 \mathbb{P}_T\big(A \vartriangle \cup_{k=1}^N A_k\big) \\
&\le \|L\|_{S_2(U_0,H)}^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Eliminiert man schließlich aus $\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{A_k} \otimes L$ diejenigen Summanden der Form $\mathbb{1}_{\{0\}\times F_0} \otimes L$ mit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ (diese werden auch in $\mathcal{N}_W^2$ alle mit dem Nulloperator identifiziert), ändert man den Wert von $\|\cdot\|_T$ nicht und erhält einen elementaren Prozess, der $\mathbb{1}_A \otimes L$ in $\|\cdot\|_T$ bis auf $\|L\|_{S_2(U_0,H)}\sqrt{\varepsilon}$ approximiert. $\square$

**Bemerkung 5.16.** *Wir beschränken uns hier auf vorhersagbare Integranden. In der skalaren stochastischen Analysis werden bei stetigen lokalen Martingalen als Integratoren – insbesondere der stBB – oft progressiv messbare Prozesse (bezüglich der augmentierten Filtration) zugelassen. Die progressive $\sigma$-Algebra $\mathcal{P}_T'$ über $\Omega_T$ wird von denjenigen Mengen $A \in \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T$ erzeugt, für welche der Indikator $\mathbb{1}_A$ progressiv messbar ist. $\mathcal{P}_T'$ ist dann zwar echt größer als $\mathcal{P}_T \subset \mathcal{P}_T'$, aber die beiden Hilberträume $L_2\big(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; \mathbb{R}\big)$ und $L_2\big(\Omega_T, \mathcal{P}_T', \mathbb{P}_T; \mathbb{R}\big)$ sind dennoch zueinander isometrisch isomorph.*

Letzteres spiegelt die Tatsache wider, dass die abstrakte $\|\cdot\|_T$-Vervollständigung $\overline{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nur bis auf isometrische Isomorphie eindeutig ist.

(iv) Die bisherige Klasse der Integranden $\mathcal{N}_W^2 = L_2\big(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; S_2(U_0, H)\big)$ wird jetzt noch mithilfe eines Lokalisierungsarguments zu

$$\mathcal{N}_W := \left\{\phi : \Omega_T \to S_2(U_0, H) : \ \phi \text{ ist } \mathcal{P}_T\text{-messbar}, \ \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\phi(t)\|_{S_2(U_0,H)}^2 dt < \infty\right) = 1\right\}$$

erweitert. Wie in der klassischen (endlichdimensionalen) stochastischen Analysis wird dabei das stochastische Integral im Allgemeinen zu einem lokalen Martingal anstelle eines $L_2(H)$-beschränkten Martingals. Für $\phi \in \mathcal{N}_W$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tau_n := \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \|\phi(s)\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds > n\right\} \wedge T. \tag{5.8}$$

Nun ist einerseits für alle $t \in [0,T]$ die Restriktion von $\phi$ auf $[0,t] \times \Omega$ insbesondere messbar bezüglich der Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, andererseits ist die Abbildung

$$S_2(U_0, H) \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \|\phi\|^2_{S_2(U_0,H)},$$

stetig, womit das Integral $\int_0^t \|\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist (Fubini). Folglich ist

$$\{\tau_n \le t\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{\tau_n < t + \frac{1}{m}\right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{q\in[0,t+1/m)\cap\mathbb{Q}} \left\{\int_0^q \|\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds > n\right\}}_{\in \mathcal{F}_{t+1/m}} \in \mathcal{F}_t$$

für alle $t \in [0,T]$ wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit von $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Damit bildet $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten mit $\tau_n \nearrow T$ $\mathbb{P}$-f.s. und

$$\mathbb{E} \int_0^T \|\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s)\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds \le n.$$

Zudem ist die $S_2(U_0,H)$-wertige Abbildung $\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi$ nach wie vor $\mathcal{P}_T$-messbar, denn

$$\begin{aligned}\left\{(t,\omega) \in \Omega_T : \mathbb{1}_{(0,\tau_n(\omega)]}(t) = 1\right\} &= \left\{(t,\omega) \in \Omega_T : \tau_n(\omega) < t \le T\right\} \cup \{0\} \times \Omega\right\}^c \\ &= \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{(q,T] \times \underbrace{\{\tau_n(\omega) \le q\}}_{\in\mathcal{F}_q}}_{\in\mathcal{P}_T} \cup \{0\} \times \Omega\right)^c.\end{aligned}$$

Damit ist dann aber auch $\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi \in \mathcal{N}_W^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten definieren

$$\int_0^t \phi(s) dW_s := \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s)\phi(s) dW_s \quad \text{auf } \{\tau_n \ge t\}. \tag{5.9}$$

Dafür ist aber sicherzustellen, dass für alle $n > m$ die Integrale $\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s)\phi(s)dW_s$ und $\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau_m]}(s)\phi(s)dW_s$ auf $\{\tau_m \ge t\}$ übereinstimmen.

**Lemma 5.17** (Lokalisierung)**.** *Seien $\tau$ eine $\mathbb{P}$-f.s. durch $T$ beschränkte $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeit und $\phi \in \mathcal{N}_W^2$. Dann gilt*

$$\int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s) dW_s = \int_0^{\cdot\wedge\tau} \phi(s) dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

*Beweis.* Da auf beiden Seiten der Gleichung ein stetiges Martingal steht, reicht es zu zeigen, dass die $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit für jedes $t \in [0,T]$ gilt, denn die Vereinigung der jeweiligen Ausnahmemengen über $t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}$ liefert dann die $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$. Sei also $t \in [0,1]$ beliebig aber fest.

Schritt 1: Seien $\phi \in \mathcal{E}$ mit Darstellung $\sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}$ gemäß Definition 5.11 und $\tau$ eine Stoppzeit, die nur endlich viele Werte annimmt, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$\tau = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $0 \leq \alpha_0 < \cdots < \alpha_n \leq T$ und $A_j = \{\tau = \alpha_j\} \in \mathcal{F}_{\alpha_j}$, $j = 0, \ldots, n$. Dann ist

$$\mathbb{1}_{(\tau,T]}\phi = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\mathbb{1}_{A_j}\phi_m}_{\mathcal{F}_{t_m \vee \alpha_j}\text{-messbar}} \mathbb{1}_{(t_m \vee \alpha_j, t_{(m+1)} \vee \alpha_j]},$$

also $\mathbb{1}_{(\tau,T]}\phi \in \mathcal{E}$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}\phi(s)dW_s &= \int_0^t \phi(s)dW_s - \int_0^t \mathbb{1}_{(\tau,T]}\phi(s)dW_s \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \Big\{ \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}\big) - \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{A_j}\big(W_{(t_{m+1}\vee\alpha_j)\wedge t} - W_{(t_m \vee \alpha_j)\wedge t}\big)\Big\} \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \Big( \big(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}\big) - \big(W_{(t_{m+1}\vee\tau)\wedge t} - W_{(t_m \vee \tau)\wedge t}\big)\Big) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \big(W_{t_{m+1}\wedge t\wedge\tau} - W_{t_m \wedge t \wedge \tau}\big) = \int_0^{t\wedge\tau} \phi(s)dW_s.
\end{aligned}$$

<u>Schritt 2:</u> Seien $\phi \in \mathcal{E}$ wie in Schritt 1 und $\tau$ eine beliebige durch $T$ $\mathbb{P}$-f.s. beschränkte Stoppzeit. Dann ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{T(k+1)}{2^n} \mathbb{1}\left\{\frac{Tk}{2^n} < \tau \leq \frac{T(k+1)}{2^n}\right\}$$

eine absteigende Folge von Stoppzeiten mit jeweils endlich vielen Werten, die $\tau$ von oben approximiert. Die pfadweise Stetigkeit des stochastischen Integrals impliziert dann für $n \to \infty$

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} \phi(s)dW_s \longrightarrow \int_0^{t\wedge\tau} \phi(s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Außerdem gilt nach dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\big\| \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi - \mathbb{1}_{(0,\tau]}\phi \big\|_T^2 = \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s) \|\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds \longrightarrow 0,$$

womit nach Definition des stochastischen Integrals

$$\left\| \int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s)\phi(s)dW_s - \int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s)dW_s \right\|_{\mathcal{M}_T^2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Letzteres impliziert aber die $\mathbb{P}$-f.s.-Konvergenz entlang einer geeigneten Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{(0,\tau_{n_k}]}(s)\phi(s)dW_s \longrightarrow \int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s)dW_s \quad \text{in } \mathcal{C}([0,T];H).$$

Die Identität $\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s)dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} \phi(s)dW_s$ $\mathbb{P}$-f.s. folgt dann aus Schritt 1.

Schritt 3: Sei nun $\phi \in \mathcal{N}_W^2$ beliebig. Da $\mathcal{E}$ dicht liegt in $\mathcal{N}_W^2$, existiert eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementarer Prozesse mit $\|\phi_n - \phi\|_T \to 0$ für $n \to \infty$. Wie im vorangehenden Schritt folgt nach Definition des stochastischen Integrals die Existenz einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\int_0^\cdot \phi_{n_k}(s)dW_s \longrightarrow \int_0^\cdot \phi(s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s. in } \mathcal{C}([0,T];H)$$

für $k \to \infty$, womit

$$\int_0^{t\wedge\tau} \phi_{n_k}(s)dW_s \longrightarrow \int_0^{t\wedge\tau} \phi(s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Da zudem $\|\mathbb{1}_{(0,\tau]}\phi_n - \mathbb{1}_{(0,\tau]}\phi\|_T \to 0$, existiert weiter eine Teilteilfolge $(n_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ entlang welcher

$$\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi_{n_{k_m}}(s)dW_s \longrightarrow \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Zusammen mit Schritt 2 folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Lemma 5.17 – angewendet auf die Stoppzeit $\tau_m$ und den Prozess $\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi \in \mathcal{N}_W^2$ für $n > m$ (mit $\tau_n$ aus (5.8) und $\phi \in \mathcal{N}_W$) – erlaubt die wohldefinierte $\mathbb{P}$-f.s. eindeutige Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathcal{N}_W$ gemäß (5.9). Die abzählbare Vereinigung der den Indexpaaren $(n,m)$ entsprechenden Ausnahmemengen ist als $\mathbb{P}$-Nullmenge in $\mathcal{F}_0$ nach Voraussetzung an die Filtration enthalten. Der Prozess $\int_0^\cdot \phi(s)dW_s$ kann darauf beispielsweise auf $0 \in H$ gesetzt werden und ist dann stetig sowie $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptiert. Er bildet so ein $H$-wertiges stetiges lokales Martingal mit lokalisierender Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Bemerkung 5.18.** *Versehen mit der Metrik $(\phi, \tilde{\phi}) \mapsto \mathbb{E}\big(\|\phi - \tilde{\phi}\|_{L_2([0,T];S_2(U_0,H))} \wedge 1\big)$ wird $\mathcal{N}_W$ übrigens zu einem vollständigen metrischen Raum. Die von dieser Ky-Fan-Metrik auf $\mathcal{N}_W$ induzierte Topologie ist die der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.*

## 5.3. Eigenschaften des stochastischen Integrals

Wir behalten die Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt bei und beginnen mit einem Analogon von Lemma 2.9 für das stochastische Integral.

**Lemma 5.19.** *Seien $(\tilde{H}, \|\cdot\|_{\tilde{H}})$ ein (weiterer) separabler Hilbertraum und $L \in L(H, \tilde{H})$. Dann ist $L\phi \in \mathcal{N}_W(\tilde{H})$ für alle $\phi \in \mathcal{N}_W(H)$, und es gilt $\mathbb{P}$-f.s.*

$$L\Big(\int_0^T \phi(s)dW_s\Big) = \int_0^T (L\phi(s))dW_s.$$

*Beweis.* Wegen $\|L \circ \phi(t)\|_{S_2(U_0,\tilde{H})} \le \|L\|_{L(H,\tilde{H})}\|\phi(t)\|_{S_2(U_0,H)}$ ist $L \circ \phi(t) \in S_2(U_0, \tilde{H})$ für alle $t \in [0,T]$. $L \circ \phi$ ist dann als Verkettung einer $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(S_2(U_0,H))$-messbaren Funktion mit einer stetigen Funktion $L : H \to \tilde{H}$ (letztere aufgefasst als stetige Funktion von $S_2(U_0,H) \to S_2(U_0,\tilde{H})$) wieder vorhersagbar. Der restliche Teil des Beweises ist Aufgabe 1 auf Übungsblatt 8. *Hinweis:* Für $\phi \in \mathcal{E}$ rechnet man die behauptete Identität unmittelbar nach. Der Fall $\phi \in \mathcal{N}_W^2(H)$ kann dann durch Approximation von $\phi$ in $\|\cdot\|_T$ durch elementare Prozesse gezeigt werden und daraus lässt sich schließlich die Behauptung für $\phi \in \mathcal{N}_W(H)$ mittels Lokalisierung ableiten. $\square$

Wie im obigen Lemma und in Integrationstheorien generell üblich werden Resultate oft zunächst für eine einfache Klasse von Integranden bewiesen und dann durch Approximation verallgemeinert. Dafür ist auch folgendes Resultat hilfreich, welches ähnlich wie Proposition 5.15 mithilfe des Dynkin-Arguments gezeigt werden kann.

**Proposition 5.20.** *Sei $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann liegen die Linearkombinationen aus Elementen*

$$(t, \omega, x) \mapsto L\phi(x)\mathbb{1}_{(s,s']}(t)\mathbb{1}_{F_s}(\omega)$$

*mit $L \in S_2(U_0, H)$, $\phi$ einer $\mathcal{X}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren beschränkten Funktion, $(s, s'] \subset [0, T]$ und $F_s \in \mathcal{F}_s$ dicht in $L_1(X, \mathcal{X}, \mu; \mathcal{N}_W^2)$.*

*Beweis.* Übungsblatt 8, Aufgabe 2. □

Das nächste Resultat ist eine Art Satz von Fubini mit einem stochastischen Integral. Wir schreiben nachfolgend $Y_t^x(\omega)$ oder kurz $Y_t^x$ für $Y(t, \omega, x)$ und unterdrücken die explizite Abhängigkeit von $\omega$ in der Notation sofern nicht erforderlich.

**Satz 5.21** (Stochastischer Satz von Fubini)**.** *Seien $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $Y \in L_1(X, \mathcal{X}, \mu; \mathcal{N}_W^2)$. Dann sind die folgenden Integrale wohldefiniert und es gilt*

$$\int_X \Big(\int_0^T Y_t^x dW_t\Big) d\mu(x) = \int_0^T \Big(\int_X Y_t^x d\mu(x)\Big) dW_t \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \tag{5.10}$$

*Beweis.* Nach Definition des Bochner-Integrals liegt der $S_2(U_0, H)$-wertige stochastische Prozess $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ mit $\eta(t, \omega) = \int_X Y_t^x(\omega) d\mu(x)$ in $\mathcal{N}_W^2$. Es also zu zeigen, dass

(i) außerhalb einer $\mu$-Nullmenge $\hat{N} \in \mathcal{X}$ eine $\mathbb{P}$-f.s. Bochner-$\mu$-integrierbare Version $\xi$ von $(\int_0^T Y_t^x dW_t)_{x\in\hat{N}^c}$ existiert und

(ii) die behauptete Identität $\int_X \xi(\omega, x) d\mu(x) = \int_0^T \eta(t, \omega) dW_t$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt.

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Linearkombinationen der Gestalt aus Proposition 5.20 mit

$$\|Y - Y_n\|_{L_1(X,\mathcal{X},\mu;\mathcal{N}_W^2)} \longrightarrow 0 \tag{5.11}$$

für $n \to \infty$.

Beweis von (i): Mit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (5.11) sei $\xi_n(\omega, x) = (\int_0^T Y_n(t, x) dW_t)(\omega)$. Nach der Jensen-Ungleichung und dem Satz von Fubini ist

$$\int_X \|Y_n^x - Y_m^x\|_T d\mu(x) \geq \int_X \mathbb{E}\|\xi_n^x - \xi_m^x\|_H d\mu(x) = \mathbb{E}\int_X \|\xi_n^x - \xi_m^x\|_H d\mu(x) \longrightarrow 0$$

für $m, n \to \infty$. Da zu einer Cauchyfolge in Wahrscheinlichkeit eine Cauchyteilfolge f.s. existiert, gibt es eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, eine $\mu$-Nullmenge $\hat{N} \in \mathcal{X}$, eine $\mathbb{P}\otimes\mu$-Nullmenge $\tilde{N} \in \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{X}$ sowie eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{F}_T$, so dass $(\xi_{n_k}(\cdot, x))_{k\in\mathbb{N}}$ wegen der Itô-Isometrie für alle $x \in \hat{N}^c$ eine $\mathcal{M}_T^2$-Cauchyfolge eingeschränkt auf den Zeitpunkt $T$ ist,

$(\xi_{n_k}(\omega,x))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $(\omega,x)\in\tilde{N}^c$ eine $H$-Cauchyfolge ist und $(\xi_{n_k}(\omega,\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $\omega\in N^c$ eine $L_1(X,\mathcal{X},\mu;H)$-Cauchyfolge ist. Also existiert der insbesondere $\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{X}$-messbare Limes

$$\xi(\omega,x) := \mathbb{1}_{\hat{N}^c}(x)\mathbb{1}_{\tilde{N}^c}(\omega,x)\mathbb{1}_{N^c}(\omega)\lim_{k\to\infty}\xi_{n_k}(\omega,x).$$

Einerseits ist $\xi(\cdot,x)$ für alle $x\in\hat{N}^c$ als Wert eines $\mathcal{M}_T^2$-Grenzwertes zum Zeitpunkt $T$ eine Version des stochastischen Integrals, andererseits ist $\xi(\omega,\cdot)$ als Grenzwert in $L_1(X,\mathcal{X},\mu;H)$ natürlich Bochner-$\mu$-integrierbar. $\xi$ erfüllt somit (i).

Beweis von (ii): Wir weisen nach, dass beide iterierten Integrale stabil gegenüber der Approximation (5.11) sind, denn für $Y_n$, $n\in\mathbb{N}$, gelten offenbar (i) sowie wegen Linearität der Integrale auch (ii). Einerseits gilt nach Bemerkung 2.7, dem Satz von Fubini sowie der Jensen-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\| \int_X \Big(\int_0^T Y_{n_k}(t,\omega,x)dW_t(\omega)\Big)d\mu(x) - \int_X \Big(\int_0^T Y(t,\omega,x)dW_t(\omega)\Big)d\mu(x)\Big\|_H \\
&\le \int_X \bigg(\mathbb{E}\Big\| \int_0^T \big(Y_{nK}(t,\omega,x)-Y(t,\omega,x)\big)dW_t(\omega)\Big\|_H\bigg)d\mu(x) \\
&\le \int_X \big\| Y_{n_k}^x - Y^x\big\|_T\, d\mu(x) \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty),
\end{aligned}$$

andererseits ist nach der Itô-Isometrie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\| \int_0^T \Big(\int_X Y_{n_k}(t,\omega,x)d\mu(x)\Big)dW_t(\omega) - \int_0^T \Big(\int_X Y(t,\omega,x)d\mu(x)\Big)dW_t(\omega)\Big\|_H^2 \\
&= \Big\| \int_X \big(Y_{n_k}^x - Y^x\big)d\mu(x)\Big\|_T^2 \\
&\le \bigg(\int_X \big\| Y_{n_k}^x - Y^x\big\|_T\, d\mu(x)\bigg)^2 \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Bemerkung 2.7 für das Bochner-Integral folgt. □

Der soeben geführte Beweis mag im Vergleich zum üblichen Beweis des klassischen Satzes von Fubini auf Produkräumen die Frage aufwerfen, weshalb hier die beiden inneren Integrale automatisch definiert sind und das Bochner-Integral $\int_X Y_t^x(\omega)d\mu(x)$ seinerseits automatisch wieder stochastisch integrierbar ist. Der Grund ist die Voraussetzung $Y\in L_1(X,\mathcal{X},\mu;\mathcal{N}_W^2)$, womit $Y$ per definitionem eine Abbildung von $X$ nach $\mathcal{N}_W^2$ ist, welche eine Bochner-messbare Version besitzt und Bochner-$\mu$-integrierbar ist. Das Bochner-$\mu$-Integral liegt nach Konstruktion seinerseits in $\mathcal{N}_W^2$, ist also insbesondere stochastisch integrierbar.

Mithilfe des Satzes von Taylor auf Banachräumen erhält man auch die Itô-Formel in unendlicher Dimension (Übungsblatt 9, Aufgabe 1). Wir präsentieren an dieser Stelle einen alternativen Beweis, der sie mithilfe der folgenden Stetigkeitslemmata auf das bereits bekannte Resultat aus der endlichdimensionalen stochastischen Analysis zurückführt.

An dieser Stelle erweist es sich als zweckmäßig, $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; B)$ mit einer Ky-Fan-Metrik zu versehen, welche die Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit metrisiert.

**Lemma 5.22.** *Seien $K$ ein kompakter topologischer Raum, $B_1$ und $B_2$ Banachräume und $F : B_1 \to B_2$ gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen. Dann ist*

$$L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}(K; B_1)) \to L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}(K; B_2)), \quad X \mapsto F \circ X$$

*stetig.*

*Beweis.* Seien $X$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; \mathcal{C}(K; B_1))$ mit $\mathbb{P}(\|X_n - X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > \eta) \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $\eta > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\|X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)}$ zudem als reellwertige Zufallsvariable natürlich straff ist, existiert ein $R > 0$, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big(\|X_n\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > R\big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\big(\|X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > R\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es bezeichne $B_R(x)$ die abgeschlossene Normkugel um $x \in B_1$ vom Radius $R$. Da nach Voraussetzung $F$ gleichmäßig stetig ist auf $B_R(0)$, existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$x, y \in B_R(0),\ \|x - y\|_{B_1} < \delta \implies \|F(x) - F(y)\|_{B_2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weiter existiert wegen $X_n \to_{\mathbb{P}} X$ in $\mathcal{C}(K; B_1)$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$, so dass

$$\mathbb{P}\big(\|X_n - X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > \delta\big) < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Zusammen ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\|F(X_n) - F(X)\|_{\mathcal{C}(K;B_2)} > \varepsilon\big) \\
&\quad \leq \mathbb{P}\big(\|F(X_n) - F(X)\|_{\mathcal{C}(K;B_2)} > \varepsilon, \|X\|_{\mathcal{C}(K,B_1)} \leq R, \|X_n\|_{\mathcal{C}(K,B_1)} \leq R\big) \\
&\qquad + \mathbb{P}\big(\|X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > R\big) + \mathbb{P}\big(\|X_n\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > R\big) \\
&\quad \leq \mathbb{P}\big(\|X_n - X\|_{\mathcal{C}(K;B_1)} > \delta\big) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \ < \ \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$. □

**Lemma 5.23.** *Die Abbildung*

$$\mathcal{N}_W \to L_0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}; \mathcal{C}([0,T]; H)), \quad \phi \mapsto \int_0^{\cdot} \phi(s) dW_s,$$

*ist gleichmäßig stetig (mit $\mathcal{N}_W$ als metrischem Raum im Sinne von Bemerkung 5.18).*

*Beweis.* Übungsblatt 9, Aufgabe 2. □

Für $\phi \in \mathcal{N}_W$ und einen vorhersagbaren $H$-wertigen Bochner-$\lambda$-integrierbaren Prozess $\varphi : (\Omega_T, \mathcal{P}_T) \to (H, \mathcal{B}(H))$ ist

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi(s) ds + \int_0^t \phi(s) dW_s$$

wohldefiniert. Der so definierte Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ist als Summe eines stetigen $H$-wertigen Prozesses von lokal endlicher Variation sowie eines stetigen $H$-wertigen lokalen Martingals ein stetiges $H$-wertiges Semimartingal.

**Satz 5.24** (Itô-Formel)**.** *Angenommen, eine zweimal Fréchet-differenzierbare Funktion* $F : H \to \mathbb{R}$ *sowie ihre Ableitungen* $F' : H \to H^*$ *und* $F'' : H \to L(H, H^*)$ *seien gleichmäßig stetig auf beschränkten Teilmengen von* $H$*. Dann gilt* $\mathbb{P}$*-f.s.*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \Big( F'(X_s)\varphi_s + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \big(F''(X_s)\phi_s e_n\big)(\phi_s e_n)\Big) ds$$
$$+ \int_0^t F'(X_s)\phi(s) dW_s \qquad \text{für alle } t \in [0,T],$$

*wobei* $(e_n)_{n\geq 1}$ *eine Orthonormalbasis von* $(U_0, \|\cdot\|_{U_0})$ *ist.*

*Beweis.* Nach der Itô-Formel in endlicher Dimension gilt das Resultat für $H$-Treppenfunktionen $\varphi$ und elementare Prozesse $\phi$ der Formen

$$\varphi = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{A_m} \otimes h_m \quad \text{und} \quad \phi = \sum_{m=0}^{l-1} \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]} \otimes \mathbb{1}_{F_m} \otimes L_m, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

wobei $A_m \in \mathcal{P}_T$, $h_m \in H$, $F_m \in \mathcal{F}_{t_m}$ und $L_m$ bezüglich $\mathcal{F}_{t_m}$-messbare $L(U_0, H)$-Operatoren von endlichem Rang sind. Nun liegen nach Proposition 2.4 einerseits Funktionen der Gestalt $\varphi$ dicht im Bochnerraum $L_1(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; H)$. Andererseits liegen die Operatoren $L_m$ aber dicht in $S_2(U_0, H)$: Sind $L \in S_2(U_0, H)$ und $\pi_n$ die Projektion auf $\operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$, so ist $L_n = L\pi_n$ von endlichem Rang und $\|L - L_n\|^2_{S_2(U_0,H)} = \sum_{k\geq n} \|Le_k\|^2_H \to 0$ $(n \to \infty)$. Also sind die Prozesse der Form $\phi$ dicht in $\mathcal{E}$ bezüglich $\|\cdot\|_T$. Im allgemeinen Fall folgt die Aussage aus Lemmata 5.22 und 5.23, weil alle Terme der Itô-Formel stetig bezüglich der Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit sind. □

Mithilfe der Itô-Formel lässt sich schließlich noch eine unendlichdimensionale Version der BDG-Ungleichung beweisen. Der nachfolgende Beweis ist dabei analog zu dem von uns geführten aus der stochastischen Analysis für die endlichdimensionale Variante.

**Satz 5.25** (Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung)**.** *Für jedes* $p \geq 2$ *existiert eine Konstante* $c_p \in (0, \infty)$*, so dass*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left\| \int_0^s \phi(u) dW_u \right\|_H^p\right] \leq c_p\, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds\right)^{p/2}\right] \quad \forall\, t \in [0,T]$$

*für jedes* $\phi \in \mathcal{N}_W$*.*

Das Resultat gilt übrigens ebenfalls für $p \in (0,2)$, aber wir verzichten an dieser Stelle darauf, es auch dafür zu beweisen.

*Beweis.* Wir verwenden zur Abkürzung die Notation der Straßburger Schule $\phi \cdot W$ für den Prozess $(\int_0^t \phi(s) dW_s)_{t\in[0,T]}$. Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die lokalisierende Folge von Stoppzeiten mit

$$\tau_n := \inf\left\{ t > 0 : \|(\phi \cdot W)_t\|_H > n \text{ oder } \int_0^t \|\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds > n \right\} \wedge T.$$

Wir beweisen die postulierte Ungleichung für $\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_n(s) = \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s)\phi(s)$ und $\tilde{\phi} \cdot W$, welches nun ein Martingal ist. Die Behauptung für $\phi \in \mathcal{N}_W$ folgt daraus dann mithilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz.

Nach Proposition 4.6 (iii) (Doobsche Maximalungleichung) und der Itô-Isometrie ist das Resultat korrekt für $p = 2$. Sei also $p > 2$. Dann ist wieder nach Proposition 4.6 (iii)

$$\mathbb{E}\Big( \sup_{s\in[0,t]} \|(\tilde{\phi} \cdot W)_s\|_H^p \Big) \leq \Big( \frac{p}{p-1} \Big)^p \mathbb{E}\|\tilde{(}\phi \cdot W)_t\|_H^p.$$

Wir wollen die Itô-Formel auf $F(\tilde{\phi} \cdot W)$ für $F(x) = \|x\|_H^p$ anwenden. Die Funktion $F$ ist zweimal Fréchet-differenzierbar. Für alle $x \in H$ gilt

$$F'(x) = p\|x\|_H^{p-2} \langle x, \cdot \rangle_H \in H^*;$$

die zweite Ableitung $F''(x) \in L(H, H^*)$ ist für $x \neq 0$ gegeben durch

$$F''(x)(y) = p(p-2)\|x\|_H^{p-4} \langle x, y \rangle_H \langle x, \cdot \rangle_H + p\|x\|^{p-2} \langle y, \cdot \rangle_H \ \in H^* \quad \text{für alle } y \in H,$$

$F''(0) = 0$ (Übungsblatt 9, Aufgabe 3). Für jedes $x \in H$ ist

$$\|F''(x)\|_{L(H,H^*)} = \sup_{\|y\|_H=1} \sup_{\|z\|_H=1} |(F''(x)(y))(z)| = p(p-1)\|x\|_H^{p-2}. \tag{5.12}$$

$F$, $F'$ und $F''$ erfüllen die Voraussetzungen aus Satz 5.24. Zudem ist $F'(\tilde{\phi} \cdot W)\tilde{\phi} \in \mathcal{N}_W^2(\mathbb{R})$ nach Definition von $\tau_n$, womit auch $\big(F'(\tilde{\phi} \cdot W)\tilde{\phi}\big) \cdot W$ wieder ein Martingal wird. Ist weiter $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalbasis von $U_0$, so folgt nach der Itô-Formel

$$\|(\tilde{\phi} \cdot W)_t\|_{L_p(H)}^p = \mathbb{E}\Big[ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{n\geq 1} \big( F''((\tilde{\phi} \cdot W)_s)(\tilde{\phi}_s e_n) \big)(\tilde{\phi}_s e_n) ds \Big]$$

(der Martingalterm hat Erwartungswert Null), und (5.12) liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{\phi} \cdot W)_t\|_{L_p(H)}^p &\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\Big[ \int_0^t \sum_{n\geq 1} \|(\tilde{\phi} \cdot W)_s\|_H^{p-2} \|\tilde{\phi}_s e_n\|_H^2 ds \Big] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\Big[ \int_0^t \|(\tilde{\phi} \cdot W)_s\|_H^{p-2} \|\tilde{\phi}_s\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds \Big] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\Big[ \sup_{s\in[0,t]} \|(\tilde{\phi} \cdot W)_s\|_H^{p-2} \int_0^t \|\tilde{\phi}_s\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds \Big].
\end{aligned}$$

Anwendung der Hölder-Ungleichung mit Exponenten $p/(p-2)$ und $p/2$ ergibt

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{\phi} \cdot W)_t\|_{L_p(H)}^p &\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\Big( \sup_{s\in[0,t]} \|(\tilde{\phi} \cdot W)_s\|_H^p \Big)^{\frac{p-2}{p}} \mathbb{E}\Big[ \Big( \int_0^t \|\tilde{\phi}_s\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds \Big)^{\frac{p}{2}} \Big]^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2} \Big[ \Big( \frac{p}{p-1} \Big)^p \mathbb{E}\|(\tilde{\phi} \cdot W)_t\|_H^p \Big]^{\frac{p-2}{p}} \mathbb{E}\Big[ \Big( \int_0^t \|\tilde{\phi}_s\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds \Big)^{\frac{p}{2}} \Big]^{\frac{2}{p}},
\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen eine Konsequenz aus der Doobschen Maximalungleichung in der $L_p$-Version ist. Teilt man nun erst beide Seiten durch

$$\Big( \mathbb{E}\|(\tilde{\phi} \cdot W)_t\|_H^p \Big)^{\frac{p-2}{p}}$$

und nimmt anschließend beide Seiten der Ungleichung zum Exponenten $p/2$, folgt die Behauptung. $\square$

# 6. Halbgruppentheorie für stochastische Evolutionsgleichungen

Wir übernehmen die Notation und Voraussetzungen des vorangehenden Kapitels und studieren nun stochastische partielle Differentialgleichungen (SPDEs) der Form

$$dX_t = (LX_t + F_t(X_t))dt + B_t(X_t)dW_t, \quad X_0 = \xi. \tag{6.1}$$

Dabei seien in diesem gesamten Kapitel $\xi$ eine $\mathcal{F}_0$-messbare $H$-wertige Zufallsvariable und $L$ der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf $H$; $F$ und $B$ seien $\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{B}(H)$-messbare Abbildungen nach $H$ bzw. $S_2(U_0, H)$.

## 6.1. Stark stetige Halbgruppen

Sind $F$ und $B$ in (6.1) gleich Null und $\xi = x_0$ konstant, reduziert sich die SPDE auf die lineare Differentialgleichung

$$\partial_t x = Lx, \quad x(0) = x_0. \tag{6.2}$$

(6.2) ist das Anfangswert- oder Cauchy-Problem zu $L$. Hiervon sollte eine Lösung, ihre Existenz vorausgesetzt, durch eine Familie linearer Operatoren $(S(t))_{t\geq 0}$ beschrieben werden können mit $S(0) = \mathrm{Id}$ und $x(t) = S(t)x_0$ für alle $t > 0$. Ist die Lösung zudem eindeutig, erfüllen diese notwendig die Identität $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ für alle $s, t \geq 0$.

**Definition 6.1.** *Eine Halbgruppe auf einem Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ ist eine Familie $(S(t))_{t\geq 0}$ aus $L(B) = L(B, B)$, welche $S(0) = Id$ sowie folgende Relation erfüllt*

$$S(t) \circ S(s) = S(t+s) \quad \textit{für alle } s, t \geq 0.$$

Die Halbgruppeneigenschaft ist allerdings noch nicht ausreichend. Zum Beispiel definiert $S(0) = \mathrm{Id}$ und $S(t) = 0$ für alle $t > 0$ eine Halbgruppe, aber $0 = S(t)x_0$ für alle $t > 0$ ist im Allgemeinen keine Lösung von (6.2). Eine Familie von Lösungsoperatoren muss also eine geeignete Regularität für $t \to 0$ besitzen.

**Definition 6.2.** *Eine Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ heißt stark stetig, falls für jedes $x \in B$ die Abbildung $[0, \infty) \to B, t \mapsto S(t)x$, stetig ist in $B$.*

**Bemerkung 6.3.** *In der Literatur wird häufig bei der Definition der starken Stetigkeit anstelle der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto S(t)x$ lediglich die rechtsseitige Stetigkeit in $t = 0$ für alle $x \in B$ gefordert. Wegen der Halbgruppeneigenschaft ist dies aber äquivalent.*

Stark stetige Halbgruppen werden auch kurz als $\mathcal{C}_0$-Halbgruppen bezeichnet. Beispielsweise ist die Kontraktionshalbgruppe der Übergangsoperatoren eines Feller-Prozesses eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf dem Banachraum $(\mathcal{C}_0([0, \infty)), \|\cdot\|_{\sup})$ der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen auf $[0, \infty)$.

**Bemerkung 6.4.** *Ist $(S(t))_{t\geq 0}$ eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe, so ist für jedes $T > 0$ nach dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit (Banach-Steinhaus) $\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\|_{L(B)} < \infty$.*

Fixiert man ein $T > 0$ und schreibt dann $t \in [0, \infty)$ als $t = nT + \theta$ mit $\theta \in [0, T)$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so ergibt sich mit $K_T = \sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\|_{L(B)}$ und $\alpha_T = T^{-1} \log K_T$ daraus die exponentielle Wachstumsschranke

$$\|S(t)\|_{L(B)} \leq \|S(T)^n S(\theta)\|_{L(B)} \leq K_T^{n+1} \leq K_T \exp(\alpha_T t).$$

Mit einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf einem allgemeinen Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ kann nun auch der sogenannte (infinitesimale) Erzeuger assoziiert werden.

**Definition 6.5.** *Der Erzeuger $L : \mathcal{D}(L) \subset B \to B$ einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe wird definiert durch*

$$Lx = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \tag{6.3}$$

*mit $\mathcal{D}(L) = \{x \in B : \text{ Für } x \text{ existiert der Limes aus (6.3) in } (B, \|\cdot\|_B)\} \subset B$.*

Ist $L$ in (6.2) der Erzeuger einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$, so ist $x(t) = S(t)x_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems (6.2) in einem schwachen Sinne nach der folgenden Proposition. Dies begründet die Voraussetzung an $L$ in (6.1).

**Proposition 6.6.** *Für eine $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe $S = (S(t))_{t\geq 0}$ und ihren Erzeuger $L$ gelten:*

*(i) Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$ ist dicht in $B$ und invariant unter $S$.*

*(ii) $\partial_t S(t)x = LS(t)x = S(t)Lx$ für jedes $x \in \mathcal{D}(L)$ und alle $t \geq 0$.*

*(iii) Für jedes $\ell \in \mathcal{D}(L^*) \subset B^*$ und jedes $x \in B$ ist die Abbildung $t \mapsto \ell\big(S(t)x\big)$ differenzierbar und es gilt $\partial_t\, \ell\big(S(t)x\big) = (L^*\ell)\big(S(t)x\big)$.*

*Beweis.* Sei $x \in B$ beliebig. Wir setzen $x_t = \int_0^t S(s)x ds$ ($s \mapsto S(s)x$ ist als stetige Funktion von $[0,t] \to B$ Bochner-messbar). Dann gilt nach Bemerkung 2.7 und der starken Stetigkeit

$$\left\| \frac{1}{h} x_h - x \right\|_B \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(s)x - x\|_B ds \leq \sup_{0<s\leq h} \|S(s)x - x\|_B \to 0 \tag{6.4}$$

für $h \searrow 0$ und folglich mithilfe von Lemma 2.9 sowie der Halbgruppeneigenschaft

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\big(S(h)x_t - x_t\big) &= \frac{1}{h}\left( \int_0^t S(s+h)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left( \int_h^{t+h} S(s)x ds - \int_0^t S(s)x ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left( \int_t^{t+h} S(s)x ds - \int_0^h S(s)x ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\big(S(t) - Id\big)x_h \longrightarrow \big(S(t) - Id\big)x \quad (h \searrow 0).
\end{aligned}$$

Damit ist $x_t \in \mathcal{D}(L)$ (mit $Lx_t = S(t)x - x$). Da $x \in B$ beliebig war, folgt zusammen mit (6.4) die erste Aussage von (i). Was die behauptete Invarianz von $\mathcal{D}(L)$ unter $S$ betrifft, konvergiert wegen $S(h)S(t) = S(h+t) = S(t)S(h)$ für jedes $x \in \mathcal{D}(L)$

$$LS(t)x = \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\big(S(h)S(t)x - S(t)x\big) = S(t) \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\big(S(h)x - x\big) = S(t)Lx. \tag{6.5}$$

Das beweist die zweite Aussage von (i) sowie die Gleichheit $LS(t)x = S(t)Lx$ aus (ii). Nun ist einerseits $h^{-1}\big(S(t+h)x - S(t)x\big) = h^{-1}\big(S(h)S(t)x - S(t)x\big) \to LS(t)x$ für $h \searrow 0$, andererseits $(-h)^{-1}\big(S(t-h)x-S(t)x\big) = (-h)^{-1}S(t-h)\big(x-S(h)x\big) \to S(t)Lx$ für $h \searrow 0$ wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $S(t-h)$, $h \in [0,t]$, nach Bemerkung 6.4. Damit existiert $\partial_t S(t)x$ für $x \in \mathcal{D}(L)$ wegen (6.5) und es gilt (ii). Weiter folgt aus der oben für alle $x \in B$ bewiesenen Identität $S(t)x - x = Lx_t = L\int_0^t S(s)xds$

$$\frac{\ell(S(h)S(t)x) - \ell(S(t)x)}{h} = \ell\bigg(L\frac{1}{h}\int_0^h S(s)S(t)xds\bigg) = L^*\ell\bigg(\frac{1}{h}\int_0^h S(s)S(t)xds\bigg)$$

für alle $x \in B$ und $\ell \in \mathcal{D}(L^*)$. Nach (6.4) konvergiert die rechte Seite gegen $L^*\ell\big(S(t)x\big)$ für $h \searrow 0$. Der linksseitige Grenzwert folgt analog, womit auch (iii) gezeigt ist. □

**Korollar 6.7.** *Erfüllt eine Abbildung $x : [0,1] \to \mathcal{D}(L)$ die Identität $\partial_t x_t = Lx_t$ für alle $t \in [0,1]$, so gilt $x_t = S(t)x_0$. Insbesondere können zwei verschiedene $\mathcal{C}_0$-Halbgruppen nicht denselben Erzeuger besitzen.*

*Beweis.* Übungsblatt 9, Aufgabe 4. *Hinweis:* Zeigen Sie wie in der vorangehenden Proposition, dass die Abbildung $t \mapsto S(t)x_{T-t}$ stetig auf $[0,T]$ sowie differenzierbar auf $(0,T)$ ist ($T \leq 1$). Verifizieren Sie $\partial_t S(t)x_{T-t} = 0$ und folgern Sie schließlich $x_T = S(T)x_0$. □

Nachdem der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe dieselbe eindeutig charakterisiert, stellt sich im Gegenzug die Frage, wann ein vorliegender Operator der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist. Diese Frage wird auf allgemeinen Banachräumen durch den *Satz von Hille-Yosida* beantwortet. Für den speziellen Banachraum $(\mathcal{C}_0([0,\infty)), \|\cdot\|_{\sup})$ wurde der Beweis im Kapitel über Feller-Prozesse in der stochastischen Analysis bereits geführt. Der allgemeine Fall wird gleichermaßen mithilfe der Yosida-Approximation gezeigt. Da das Resultat jedoch für den weiteren Verlauf dieses Kapitels nicht benötigt wird, gehen wir an dieser Stelle nicht weiter darauf ein.

Mitunter ist es zweckmäßig, zu einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ und ihrem Erzeuger $L$ die Halbgruppe der adjungierten $L(B^*)$-Operatoren $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ und $L^*$ zu studieren. Hier ist Vorsicht geboten, denn im Allgemeinen ist die adjungierte Halbgruppe $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe nicht wieder stark stetig. Allerdings gilt (siehe beispielsweise [5]):

**Bemerkung 6.8.** *Die adjungierte Halbgruppe einer $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe auf einem reflexiven Banachraum mit Erzeuger $L$ ist wieder stark stetig und wird von $L^*$ erzeugt.*

## 6.2. Lösungskonzepte und ihre Relationen

Wir wenden uns nun verschiedenen Lösungsbegriffen von (6.1) sowie ihren Implikationen zu. Das Attribut *schwach* bezieht sich im Folgenden auf den Lösungsbegriff aus der Theorie partieller Differentialgleichungen und nicht (!) auf die probabilistische Definition einer Lösung zu einer stochastischen Differentialgleichung. Aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht betrachten wir in diesem Abschnitt ausschließlich starke Lösungen. Die probabilistisch schwachen Pendants wären sogenannte Martingallösungen.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass in allen drei folgenden Definitionen die Ausnahmemengen $t$-abhängig sein können, was den Nullmengenkalkül merklich beeinflusst. Es ist zudem als Teil der nachfolgenden Definitionen anzusehen, dass die auftretenden Integrale wohldefiniert sind.

**Definition 6.9.** *Ein $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbarer Prozess $X : \Omega_T \to \mathcal{D}(L)$ heißt starke Lösung von (6.1), falls*

$$X_t = \xi + \int_0^t \big(LX_s + F_s(X_s)\big)ds + \int_0^t B_s(X_s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.6}$$

*für jedes $t \in [0,T]$ gilt.*

Wohingegen eine starke Lösung $\mathcal{D}(L)$-wertig sein muss, sind die beiden folgenden Lösungsbegriffe auch für lediglich $H$-wertige Prozesse sinnvoll.

**Definition 6.10.** *Eine schwache Lösung von (6.1) ist ein $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbarer Prozess $X : \Omega_T \to H$, der*

$$\langle X_t, h\rangle_H = \langle \xi, h\rangle_H + \int_0^t \big(\langle X_s, L^*h\rangle_H + \langle F_s(X_s), h\rangle_H\big)ds + \int_0^t \langle B_s(X_s), h\rangle_H dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.7}$$

*für jedes $t \in [0,T]$ und $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*) \subset H^*$ erfüllt.*

Speziell für konstantes $B$ ist das stochastische Integral in (6.7) wegen $\langle \cdot, h\rangle_H \in S_2(H;\mathbb{R})$ selbst dann wohldefiniert, wenn $B$ kein Hilbert-Schmidt-Operator sondern nur stetig ist.

**Definition 6.11.** *Ein $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbarer Prozess $X : \Omega_T \to H$ heißt milde Lösung von (6.1), falls*

$$X_t = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds + \int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.8}$$

*für jedes $t \in [0,T]$ gilt, wobei $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $L$ erzeugte $\mathcal{C}_0$-Halbgruppe bezeichnet.*

Sowohl beim starken als auch beim schwachen Lösungsbegriff ist es möglich, die rechte Seite pfadweise zu studieren, denn die stochastischen Integrale sind als Prozesse in $t$ für $\mathcal{N}_W$-Integranden außerhalb einer $\mathbb{P}$-Nullmenge definiert. Das ist wegen der expliziten $t$-Abhängigkeit vom Integranden in (6.8) bei einer milden Lösung nicht mehr der Fall.

Die folgenden beiden Sätze dieses Abschnitts zeigen, wie diese drei Lösungsbegriffe zueinander in Beziehung stehen.

**Satz 6.12** (Starke und schwache Lösung)**.**

*(i) Jede starke Lösung ist eine schwache Lösung.*

*(ii) Jede schwache Lösung, die $\mathcal{D}(L)$-wertig ist und*

$$\mathbb{P}\bigg(\int_0^T \big(\|LX_t\|_H + \|F_t(X_t)\|_H\big)dt + \int_0^T \|B(X_t)\|^2_{S_2(U_0,H)}dt < \infty\bigg) = 1$$

*erfüllt, ist eine starke Lösung.*

*Beweis.* Aussage (i) folgt aus Lemma 2.9 und Lemma 5.19. Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ eine schwache Lösung von (6.1). Dann gilt nach mit den Integrierbarkeitsannahmen nach Lemma 5.19

$$\langle X_t, h\rangle_H = \left\langle \xi + \int_0^t LX_s + F_s(X_s)ds + \int_0^t B_s(X_s)dW_s,\, h\right\rangle_H \tag{6.9}$$

außerhalb einer $\mathbb{P}$-Nullmenge $N(t,h)$, für jedes $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ und jedes $t \in [0,T]$. Da

$H$ als Hilbertraum reflexiv ist, ist $L^*$ nach Bemerkung 6.8 wieder der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe. Insbesondere ist $\mathcal{D}(L^*)$ damit nach Proposition 6.6 (i) dicht in $H^*$. Da $H \cong H^*$ separabel ist (nach Voraussetzung des Kapitels), existiert wie in Lemma 3.3 nach dem Satz von Hahn-Banach eine Folge $(\langle \cdot, h_n \rangle_H)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}(L^*)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle x, h_n \rangle_H = \|x\|_H$ für alle $x \in H$. Angewendet auf die Differenz aus der linken und rechten Seite in (6.9) ergibt dies $X_t = \xi + \int_0^t \big(LX_s + F_s(X_s)\big)ds + \int_0^t B_s(X_s)dW_s$ außerhalb der Nullmenge $\cup_{n\in\mathbb{N}} N(t, h_n)$, für jedes $t \in [0, T]$. □

Für die Beweise der weiteren Aussagen vergegenwärtigen wir uns folgende Konsequenz aus dem Satz von Fubini. Der springende Punkt ist, dass für die Aussage keine $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit der Prozesse erforderlich ist sondern nur $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit punktweise in $t$.

**Lemma 6.13.** *$X, Y : \Omega_T \to H$ seien $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbare $\mathbb{P}$-f.s. Bochner-$\lambda$-integrierbare Prozesse mit $X_t = Y_t$ $\mathbb{P}$-f.s für jedes $t \in [0, T]$. Dann gilt $\int_0^T X_t dt = \int_0^T Y_t dt$ $\mathbb{P}$-f.s.*

*Beweis.* Eine Anwendung von Bemerkung 2.7 sowie dem Satz von Fubini ergibt

$$\mathbb{E}\left\| \int_0^T X_t dt - \int_0^T Y_t dt \right\|_H \leq \mathbb{E} \int_0^T \|X_t - Y_t\|_H dt = \int_0^T \mathbb{E}\|X_t - Y_t\|_H dt = 0,$$

also $\| \int_0^T X_t dt - \int_0^T Y_t dt\|_H = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. □

Das nächste Lemma, angewendet mit dem separablen Hilbertraum $S_2(U_0, H)$, garantiert für einen vorhersagbaren Prozess $\phi : \Omega_T \to S_2(U_0, H)$ die Wohldefiniertheit der stochastischen Faltung

$$W_t^\phi = \int_0^t S(t-s)\phi(s) dW_s, \tag{6.10}$$

sofern $\mathbb{P}\big( \int_0^t \|S(t-s)\phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds < \infty \big) = 1$ für $t \in [0, T]$.

Wir erinnern an die Definition 5.14 der vorhersagbaren $\sigma$-Algebra $\mathcal{P}_T$.

**Lemma 6.14.** *Für $\varphi : (\Omega_T, \mathcal{P}_T) \to (H, \mathcal{B}(H))$ ist $\tilde{\varphi} : (s, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{[0,t)}(s) S(t-s)\varphi(s, \omega)$ vorhersagbar.*

*Beweis.* Ist $\varphi$ eine $\mathcal{P}_T$-messbare Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^n h_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit einer disjunkten Zerlegung $A_1, \ldots, A_n$ von $\Omega_T$, wobei $h_k \in H$, $A_k \in \mathcal{P}_T$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\tilde{\varphi}(s, \omega) = \mathbb{1}_{[0,t)}(s) S(t-s) h_k \mathbb{1}_{A_k}(s, \omega)$ $\mathcal{P}_T$-messbar, denn wegen der starken Stetigkeit der Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ ist für $B \in \mathcal{B}(H)$

$$\tilde{\varphi}^{-1}(B) = \bigcup_{k=1}^n \underbrace{\Big( \underbrace{\{s \in [0,T] : \mathbb{1}_{[0,t)}(s) S(t-s) h_k \in B\}}_{\in \mathcal{B}([0,T])} \times \Omega \Big) \cap A_k}_{\in \mathcal{P}_T} \ \in \mathcal{P}_T.$$

Sei nun $\varphi$ eine beliebige $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbare Funktion. Wegen Separabilität von $H$ ist nach Lemma 2.10 $\varphi$ Bochner-messbar und somit punktweiser Limes von $\mathcal{P}_T$-Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $S(t-s) \in L(H)$ für $0 \leq s \leq t$ folgt $\tilde{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n$ und damit die $\mathcal{P}_T$-Messbarkeit von $\tilde{\varphi}$. □

**Satz 6.15** (Schwache und milde Lösung)**.**

*(i) Jede schwache Lösung mit* $\mathbb{P}\big(\int_0^T \|B_s(X_s)\|^2_{L(U_0,H)} ds < \infty\big) = 1$ *sowie*

$$\mathbb{P}\bigg(\int_0^T \big(\|X_s\|_H + \|F_s(X_s)\|_H\big) ds + \int_0^t \|S(t-s)B_s(X_s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds < \infty\bigg) = 1$$

*für alle* $t \in [0,T]$ *ist eine milde Lösung.*

*(ii) Jede milde Lösung, für die die Integrale auf der rechten Seite in (6.8) als Prozesse in* $t$ *vorhersagbare Versionen besitzen und welche* $\mathbb{P}\big(\int_0^T \|F_t(X_t)\|_H dt < \infty\big) = 1$ *sowie*

$$\int_0^T \mathbb{E}\bigg[\int_0^t \|\langle S(t-s)B_s(X_s), L^*h\rangle_H\|^2_{S_2(U_0,\mathbb{R})} ds\bigg] dt < \infty$$

*für alle* $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ *erfüllt, ist eine schwache Lösung.*

*Beweis.* (i) Schritt 1: Seien $X$ eine schwache Lösung von (6.1) und $\zeta$ von der Gestalt $\zeta(t) = \langle \cdot, h\rangle_H \phi(t)$, $t \in [0,T]$, mit $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$. Wir zeigen zuerst die Identität

$$\begin{aligned}\langle X_t, \zeta(t)\rangle_H = \langle \xi, \zeta(0)\rangle_H &+ \int_0^t \big(\langle X_s, L^*\zeta(s)\rangle_H + \langle F_s(X_s), \zeta(s)\rangle_H + \langle X(s), \zeta'(s)\rangle_H\big) ds \\ &+ \int_0^t \langle B_s(X_s), \zeta(s)\rangle_H dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für jedes } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Wenden wir die partielle Integrationsregel für das (reellwertige) Itô-Integral auf das Produkt der Prozesse $\phi$ und

$$t \mapsto F_h(t) = \langle \xi, h\rangle_H + \int_0^t \big(\langle X_s, L^*h\rangle_H + \langle F_s(X_s), h\rangle_H\big) ds + \int_0^t \langle B_s(X_s), h\rangle_H dW_s$$

an, erhält man

$$\begin{aligned} F_h(t)\phi(t) - \langle \xi, h\rangle_H \phi(0) = &\int_0^t \big(\langle X_s, L^*h\rangle_H + \langle F_s(X_s), h\rangle_H\big)\phi(s) ds \\ &+ \int_0^t \langle B_s(X_s), h\phi(s)\rangle_H dW_s \\ &+ \int_0^t \phi'(s) F_h(s) ds \quad \forall t \in [0,T] \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Wegen $F_h(t) = \langle X(t), h\rangle_H$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$ nach Voraussetzung ergibt Lemma 6.13, angewendet auf $t \mapsto \phi'(t)F_h(t)$,

$$\begin{aligned} \langle X(t), h\rangle_H \phi(t) - \langle \xi, h\rangle_H \phi(0) = &\int_0^t \big(\langle X_s, L^*h\rangle_H + \langle F_s(X_s), h\rangle_H\big)\phi(s) ds \\ &+ \int_0^t \langle B_s(X_s), h\phi(s)\rangle_H dW_s \\ &+ \int_0^t \phi'(s)\langle X(s), h\rangle_H ds \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für jedes } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Mit $\langle \cdot, h\rangle_H \phi(t) = \langle \cdot, \zeta(t)\rangle_H$ und $\phi'(t)\langle X(t), h\rangle_H = \langle X(t), \zeta'(t)\rangle_H$ für $t \in [0,T]$ folgt (6.11).

Schritt 2: Wir zeigen, dass für $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ Gleichung (6.11) mit $\zeta^{h,t} : [0,t] \to \mathcal{D}(L^*)$, $\zeta^{h,t}(s) = S(t-s)^*\langle \cdot, h\rangle_H$, und jedes $t \in [0,T]$ gilt. Da $H$ als Hilbertraum reflexiv ist, sagt Bemerkung 6.8, dass $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ wieder stark stetig ist mit Erzeuger $L^*$. Damit ist nach Proposition 6.6 (i) $S(t-s)^*\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ und nach Proposition 6.6 (ii) ist $s \mapsto \zeta^{h,t}(s)$ stetig differenzierbar. Sei nachfolgend $t \in [0,T]$ fest. Versehen mit der Graphennorm

$$\|\ell\|_{\mathcal{D}(L^*)} = \|\ell\|_{H^*} + \|L^*\ell\|_{H^*}, \quad \ell \in \mathcal{D}(L^*),$$

wird $\mathcal{D}(L^*)$ zum Banachraum (Übungsblatt 10, Aufgabe 1). Nach Schritt 1 und Linearität der Integrale gilt (6.11) für Linearkombinationen von Funktionen $\phi \otimes \ell : s \mapsto \phi(s)\ell$ mit $\ell$ aus $\mathcal{D}(L^*)$ und stetig differenzierbarem $\phi : [0,t] \to \mathbb{R}$. Durch solche Linearkombinationen kann $\zeta^{h,t}$ bezüglich der Norm

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}([0,t];\mathcal{D}(L^*))} + \|\partial_s \cdot\|_{\mathcal{C}([0,t];H)}$$

beliebig gut approximiert werden (Übungsblatt 10, Aufgaben 3 und 4). Bleibt der Nachweis, dass (6.11) stabil bezüglich der Konvergenz in dieser Norm ist. Sei $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus

$$\operatorname{span}\big(\phi \otimes \ell : \phi : [0,t] \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}, \ell \in \mathcal{D}(L^*)\big)$$

mit

$$\|\zeta_n - \zeta^{h,t}\|_{\mathcal{C}([0,t];\mathcal{D}(L^*))} + \|\partial_s(\zeta_n - \zeta^{h,t})\|_{\mathcal{C}([0,t];H)} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \|\langle B_s(X_s), \zeta_n(s) - \zeta^{h,t}(s)\rangle_H\|^2_{S_2(U_0,\mathbb{R})} ds\Big) \wedge 1\Big] \\
&\quad\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \|B_s(X_s)\|^2_{L(U_0,H)} \|\zeta_n(s) - \zeta^{h,t}(s)\|^2_H ds\Big) \wedge 1\Big] \\
&\quad\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\|\zeta^{h,t} - \zeta_n\|^2_{\mathcal{C}([0,t];\mathcal{D}(L^*))} \int_0^t \|B_s(X_s)\|^2_{L(U_0,H)} ds\Big) \wedge 1\Big] \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, implizieren Bemerkung 5.18 und Lemma 5.23 die Existenz einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\int_0^t \langle B_s(X_s), \zeta_{n_k}(s)\rangle_H dW_s \longrightarrow \int_0^t \langle S(t-s)B_s(X_s), h\rangle_H dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $k \to \infty$. $\int_0^t \langle F_s(X_s), \zeta_n(s) - \zeta^{h,t}(s)\rangle_H ds \to_{\mathbb{P}} 0$ folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wegen $L^*\zeta^{h,t} + \partial_s\zeta^{h,t} = 0$ nach Bemerkung 6.8 und Proposition 6.6 (ii) auch

$$\int_0^t \langle X_s, L^*\zeta_n + \partial_s\zeta_n\rangle_H ds \longrightarrow_{\mathbb{P}} 0.$$

Diese Konvergenzen gelten entlang einer geeigneten Teilfolge $\mathbb{P}$-f.s. Es gilt also $\mathbb{P}$-f.s.

$$\langle X_t, h\rangle_H = \langle \xi, S(t)h\rangle_H + \int_0^t \langle S(t-s)F_s(X_s), h\rangle_H ds + \int_0^t \langle S(t-s)B_s(X_s), h\rangle_H dW_s.$$

Schritt 3: Nach Lemma 2.9, Lemma 5.19, Lemma 6.14 sowie der Voraussetzung an $B$ und $F$ ist die letzte Gleichung aber äquivalent zu

$$\left\langle X_t - S(t)\xi - \int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds - \int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s,\ h\right\rangle_H = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für jedes $t \in [0,T]$ und jedes $h \in \mathcal{D}(L^*)$. Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von Satz 6.12 (ii).

(ii) Es seien nachfolgend $(\int_0^t (S(t-s)F_s(X_s))ds)_{t\in[0,T]}$ und $(\int_0^t (S(t-s)B_s(X_s))ds)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{P}_T$-messbare Versionen. Wegen $\sup_{0\le t\le T}\|S(t)\|_{L(H)} < \infty$ nach Bemerkung 6.4 gilt für alle $\langle\cdot,h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$ nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Bemerkung 2.7 (Bochner-Ungleichung)

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\left\langle \int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds,\ L^*h\right\rangle_H\right| dt \\
&\quad\le \|L^*\ell\|_{H^*}\int_0^T\int_0^t \|S(t-s)F_s(X_s))\|_H ds\, dt \\
&\quad\le \|L^*\ell\|_{H^*}\Big(\sup_{0\le t\le T}\|S(t)\|_{L(H)}\Big)T\int_0^T \|F_s(X_s))\|_H ds\, dt < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Außerdem ist nach Lemma 5.19, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das $\int_0^T$-Integral, der Jensen-Ungleichung für den Erwartungswert, dem Satz von Fubini und der Itô-Isometrie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left|\left\langle \int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s,\ L^*h\right\rangle_H\right| dt \\
&\quad= \mathbb{E}\int_0^T \left|\int_0^t \langle S(t-s)B_s(X_s)), L^*h\rangle_H dW_s\right| dt \\
&\quad\le \sqrt{T}\,\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|\int_0^t \langle S(t-s)B_s(X_s)), L^*h\rangle_H dW_s\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\quad\le \sqrt{T}\left(\mathbb{E}\int_0^T \left|\int_0^t \langle S(t-s)B_s(X_s)), L^*h\rangle_H dW_s\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\quad= \sqrt{T}\left(\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\langle S(t-s)B_s(X_s)), L^*h\rangle_H\|^2_{S_2(U_0,\mathbb{R})} ds\right] dt\right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

$(\langle \int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds,\ L^*h\rangle_H)_{t\in[0,T]}$ und $(\langle \int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s,\ L^*h\rangle_H)_{t\in[0,T]}$ sind damit $\mathbb{P}$-f.s. Lebesgue-integrierbar über $[0,T]$. Da $X$ eine milde Lösung ist, folgt nach Lemma 6.13

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle X_s, L^*h\rangle_H ds = \int_0^t \langle S(s)\xi, L^*h\rangle_H ds &+ \int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-u)F_u(X_u)du,\ L^*h\right\rangle_H ds \\
&+ \int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-u)B_u(X_u)dW_u,\ L^*h\right\rangle_H ds \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,T]$ und $\langle \cdot, h\rangle_H \in \mathcal{D}(L^*)$. Der Term auf der linken Seite taucht bereits in der Darstellung der schwachen Lösung auf. Wir analysieren die Summanden auf der rechten Seite von (6.12). Da $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ nach Bemerkung 6.8 stark stetig mit Erzeuger $L^*$ ist, folgen nach Proposition 6.6 (ii) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Bochner-Integral (Übungsblatt 10, Aufgabe 2) $\mathbb{P}$-f.s.

$$\int_0^t \langle S(s)\xi, L^*h\rangle_H ds = \int_0^t \langle \xi, S(s)^*L^*h\rangle_H ds = \int_0^t \langle \xi, \partial_s S(s)^*h\rangle_H ds = \langle (S(t)-\mathrm{Id})\xi, h\rangle_H$$

sowie unter zusätzlicher Verwendung von Lemma 2.9 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-u)F_u(X_u)du,\, L^*h \right\rangle_H ds \\
&\quad = \int_0^t \int_u^t \langle F_u(X_u), S(s-u)^*L^*h\rangle_H ds\, du \\
&\quad = \int_0^t \langle F_u(X_u), (S(t-u)-\mathrm{Id})^*h\rangle_H du \;=\; \left\langle \int_0^t (S(t-s)-\mathrm{Id})F_s(X_s)ds,\, h\right\rangle_H \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Schließlich erhält man analog für den Summanden mit dem stochastischen Integral nach Anwendung von Lemma 5.19, Satz 5.21 (stochastischer Satz von Fubini) sowie ebenfalls Proposition 6.6 (ii) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Bochner-Integral $\mathbb{P}$-f.s.

$$\int_0^t \left\langle \int_0^s S(s-u)B_u(X_u)dW_u,\, L^*h\right\rangle_H ds = \left\langle \int_0^t (S(t-s)-\mathrm{Id})B_s(X_s)dW_s, h\right\rangle_H .$$

Einsetzen der Ausdrücke in (6.12) ergibt die Darstellung der schwachen Lösung. □

**Bemerkung 6.16.** *Eine starke Lösung mit $\mathbb{P}\big(\int_0^T \|X_t\|_H dt < \infty\big) = 1$ ist auch eine milde Lösung. Das folgt aus Satz 6.12 (i) und Satz 6.15 (i). Wegen der Definitionen von $L_1(H)$ und $\mathcal{N}_W$ sowie $\sup_{0\leq t\leq T}\|S(t)\|_{L(H)} < \infty$ nach Bemerkung 6.4 gelten die übrigen Voraussetzungen aus Satz 6.15 (i) im Falle der Existenz einer starken Lösung automatisch.*

Natürlich liegt eine Stärke der milden Lösung darin, dass diese auch in Situationen definiert werden kann, in der die Integrale in (6.6) nicht existieren. Im Hinblick auf Bemerkung 6.16 sowie Satz 6.15 (ii) stellt sich allerdings dennoch die Frage, ob es immer $\mathcal{P}_T$-messbare Versionen von $(\int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds)_{t\in[0,T]}$ und $(\int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s)_{t\in[0,T]}$ zumindest im Falle der Existenz der Integrale $\int_0^\cdot F_s(X_s)ds$ und $\int_0^\cdot B_s(X_s)dW_s$ in (6.6) gibt. Die positive Antwort wird mit den verbleibenden Resultaten dieses Abschnitts gegeben. Diese Ergebnisse werden außerdem benötigt für den Existenzbeweis einer milden SPDE-Lösung mithilfe eines Fixpunktarguments in Abschnitt 6.3.

**Definition 6.17.** *Für einen separablen Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ bezeichnen wir einen Prozess $X : \Omega_T \to B$ als stochastisch stetig, falls zu jedem $t_0 \in [0,T]$ und zu jedem Paar $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\mathbb{P}\big(\|X_t - X_{t_0}\|_B > \varepsilon\big) \leq \varepsilon' \quad \textit{für alle } t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \cap [0,T].$$

Da das Intervall $[0,T]$ kompakt ist, ist ein stochastisch stetiger Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ gleichmäßig stochastisch stetig (Übungsblatt 11, Aufgabe 1 (i)), d.h. $\delta$ kann unabhängig von $t_0$ gewählt werden.

**Proposition 6.18.** *Sei $(B, \|\cdot\|_B)$ ein separabler Banachraum. Dann besitzt ein stochastisch stetiger, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptierter, $B$-wertiger Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ eine $\mathcal{P}_T$-messbare Version.*

*Beweis.* Zu $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zerlegung von $[0,T]$ durch die Gitterpunkte $0 = t_0 < t_{m,1} < \ldots t_{m,n(m)} = T$, so dass für $t \in (t_{m,k}, t_{m,k+1}]$, so dass

$$\mathbb{P}\big(\|X_{t_{m,k}} - X_t\|_B \geq 2^{-m}\big) \leq 2^{-m}, \quad k = 0, \ldots, n(m) - 1. \tag{6.13}$$

Definiert man nun

$$X_t^m(\omega) := \begin{cases} X_0(\omega) & \text{falls } t = 0, \\ X_{t_{m,k}}(\omega) & \text{falls } t \in (t_{m,k}, t_{m,k+1}] \text{ and } k \leq n(m) - 1, \end{cases}$$

so ist $X^m$ $\mathcal{P}_T$-messbar für alle $m \in \mathbb{N}$. Sei $M$ diejenige Menge, für die $\lim_{m\to\infty} X_t^m(\omega)$ existiert; wegen der $\mathcal{P}_T$-Messbarkeit aller $X^m$ ist diese $\mathcal{P}_T$-messbar und auch

$$\tilde{X}_t(\omega) := \mathbb{1}_M(t,\omega) \lim_{m\to\infty} X_t^m(\omega)$$

ist als punktweiser Grenzwert $\mathcal{P}_T$-messbarer Abbildungen $\mathcal{P}_T$-messbar. Da weiter gilt $\|X_t^m - X_t\|_B \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$ nach (6.13) und dem Lemma von Borel-Cantelli, ist dann $\tilde{X}_t = X_t$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$. $\tilde{X}$ ist die gesuchte Version. $\square$

**Proposition 6.19.** *Sei $\varphi : (\Omega_T, \mathcal{P}_T) \to (H, \mathcal{B}(H))$ ein vorhersagbarer $H$-wertiger Bochner-$\lambda$-integrierbarer Prozess. Dann ist $(\int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds)_{t\in[0,T]}$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig und besitzt eine $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbare Version.*

*Beweis.* Wegen $K_T = \sup_{0\leq s\leq T} \|S(s)\|_{L(H)} < \infty$ nach Bemerkung 6.4 und der Ungleichung $\|\mathbb{1}_{[0,t)}(s)S(t-s)\varphi(s)\|_H \leq K_T\|\varphi(s)\|_H$ ist $s \mapsto \mathbb{1}_{[0,t)}(s)S(t-s)\varphi(s)$ integrierbar. Weiter gilt (Übungsblatt 11, Aufgabe 2): Die Abbildung $t \mapsto \int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds$ ist $\mathbb{P}$-f.s. stetig (*Hinweis:* Satz von der dominierten Konvergenz) und der Prozess

$$\left(\int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds\right)_{t\in[0,T]}$$

ist $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptiert (*Hinweis:* Lemma 6.14, $\mathcal{P}_T \cap ([0,t) \times \Omega) \subset \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_t$ sowie Blatt 1, Aufgabe 3). Die letzte Behauptung folgt dann aus Proposition 6.18. $\square$

**Proposition 6.20** (Stochastische Faltung)**.**

*(i) Für jedes $\phi \in \mathcal{N}_W$ ist der Prozess $(W_t^\phi)_{t\in[0,T]}$ mit $W_t^\phi$ aus (6.10) stochastisch stetig und besitzt eine $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(S_2(U_0,H))$-messbare Version.*

*(ii) Für jedes $\phi \in \mathcal{N}_W^2$ ist die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}\big(\|W_t^\phi\|_H^2\big)$ stetig.*

*Beweis.* (i) Schritt 1: Sei zunächst $\phi \in S_2(U_0, H)$ konstant. Dann ist für $0 \le s \le t \le T$

$$W_t^\phi - W_s^\phi = \int_s^t S(t-u)\phi dW_u + \int_0^s \big(S(t-u) - S(s-u)\big)\phi dW_u. \tag{6.14}$$

Sei $(e_n)_{n\ge1}$ eine Orthonormalbasis von $(\ker(Q))^\perp \subset U$ mit $Qe_n = \lambda_n e_n$ für die Eigenwerte $\lambda_n \in (0,\infty)$. Aus Unabhängigkeit der beiden Integrale in (6.14) und der Itô-Isometrie folgt

$$\mathbb{E}\Big[\,\big\|\,W_t^\phi - W_s^\phi\,\big\|_H^2\Big] = \sum_{n\ge1} \lambda_n \int_0^T \mathbb{1}_{[0,t-s]}(u)\|S(u)\phi e_n\|_H^2 du$$
$$+ \sum_{n\ge1} \lambda_n \int_0^T \mathbb{1}_{[0,s]}(u)\,\big\|\,\big(S(t-s+u) - S(u)\big)\phi e_n\,\big\|_H^2 du.$$

Wegen der starken Stetigkeit von $(S(t))_{t\ge0}$ konvergieren die auftretenden Integranden allesamt gegen Null für $t-s \to 0$. Wegen $\|S(u)\phi e_n\|_H \le \sup_{0\le u\le T}\|S(u)\|_{L(H)}\|\phi e_n\|_H$, Bemerkung 6.4 sowie

$$\sum_{n\ge1}\|\phi e_n\|_H^2 = \|\phi\|_{S_2(U_0,H)}^2 < \infty$$

nach Voraussetzung folgt die stochastische Stetigkeit von $(W_t^\phi)_{t\in[0,T]}$ aus dem Satz von der dominierten Konvergenz; zudem ist der Prozess $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptiert. Proposition 6.18 impliziert dann die Existenz einer $\mathcal{P}_T$-messbaren Version. Die Aussage für $\phi \in \mathcal{E}$ folgt aus der Unkorreliertheit der Integrale in (6.14), der Itô-Isometrie und dann aus der Linearität des Integrals wie oben, wobei $\phi \in \mathcal{E}$ per definitionem nur endlich viele Werte annimmt.

Schritt 2: Sei nun $\phi \in \mathcal{N}_W$. Dann existiert eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementarer Prozesse mit

$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^T \|\phi(t) - \phi_n(t)\|_{S_2(U_0,H)}^2 dt \wedge 1\bigg) \longrightarrow 0$$

für $n\to\infty$ (Übungsblatt 11, Aufgabe 1 (ii)). Wegen $K_T = \sup_{0\le s\le T}\|S(s)\|_{L(H)} < \infty$ nach Bemerkung 6.4 gilt die Konvergenz

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big(\|\mathbb{1}_{[0,t)}S(t-\cdot)(\phi-\phi_n)\|_{L_2([0,T];S_2(U_0,H))} \wedge 1\big)$$
$$\le (K_T \vee 1)\mathbb{E}\big(\|\phi-\phi_n\|_{L_2([0,T];S_2(U_0,H))} \wedge 1\big) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty),$$

und nach Lemma 5.23 folgt $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\big(\|W_t^\phi - W_t^{\phi_n}\|_H \wedge 1\big) \to 0$ für $n\to\infty$. Aus

$$\mathbb{E}\big(\|W_t^\phi - W_s^\phi\|_H \wedge 1\big) \le 2\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\big(\|W_t^\phi - W_t^{\phi_n}\|_H \wedge 1\big) + \mathbb{E}\big(\|W_t^{\phi_n} - W_s^{\phi_n}\|_H \wedge 1\big)$$

ergibt sich damit die stochastische Stetigkeit von $W^\phi$ aus der von den Prozessen $W^{\phi_n}$, welche nach Schritt 1 gilt. Die Existenz einer $\mathcal{P}_T$-messbaren Version von $W^\phi$ ist nun mit der $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Adaptiertheit wieder eine Konsequenz aus Proposition 6.18 (alternativ kann man nach Übergang zu einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{P}(\|W^{\phi_{n_k}} - W^\phi\|_H \ge 2^{-k}) \le 2^{-k}$ für alle $t\in[0,T]$ auch direkt wie im Beweis von Proposition 6.18 argumentieren).

(ii) Übungsblatt 12, Aufgabe 1. *Hinweis:* Die Abbildung

$$\mathcal{N}_W^2 \to \mathcal{M}_T^2, \quad \phi \mapsto \int_0^\cdot \phi(s) dW_s,$$

ist gleichmäßig stetig und $(s,\omega) \mapsto \mathbb{1}_{[0,t)}(s) S(t-s)\phi(s)$ liegt wegen Bemerkung 6.4 und Lemma 6.14 in $\mathcal{N}_W^2$ für alle $t \in [0,T]$. □

Die Voraussetzungen an $\varphi$ und $\phi$ in den letzten beiden Propositionen sind hinreichend aber nicht notwendig für die Existenz einer vorhersagbaren Version. Beispielsweise behält die stochastische Stetigkeit der stochastischen Faltung aus Schritt 1 im Beweis von Proposition 6.20 auch ihre Gültigkeit, wenn man lediglich $\phi \in L(U_0, H)$ mit

$$\int_0^T \|S(t)\phi\|_{S_2(U_0,H)}^2 dt < \infty$$

voraussetzt.

## 6.3. Milde Existenz und Eindeutigkeit mit Lipschitz-Nichtlinearitäten

Wir starten mit dem Hauptresultat dieses Abschnittes – einer Verallgemeinerung auf separable Hilberträume der endlichdimensionalen Resultate über Existenz und Eindeutigkeit unter linearer Wachstums- und Lipschitz-Bedingungen an die Koeffizienten.

**Satz 6.21.** *Angenommen, die $\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{B}(H)$-messbaren Abbildungen $F$ und $B$ nach $H$ bzw. $S_2(U_0, H)$ besitzen die folgenden Eigenschaften:*

*(i) $F$ und $B$ sind Lipschitz-stetig in der $H$-Variable mit einer Lipschitz-Konstante, die unabhängig von $(t,\omega)$ gewählt werden kann;*

*(ii) Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\|F_t(\omega,x)\|_H^2 + \|B_t(\omega,x)\|_{S_2(U_0,H)}^2 \leq C^2(1 + \|x\|_H^2)$$

*für alle $(t,\omega) \in \Omega_T$.*

*Dann existiert eine milde Lösung zu Gleichung (6.1). Diese ist bis auf Prozess-Versionen eindeutig unter allen vorhersagbaren Prozessen mit*

$$\mathbb{P}\left( \int_0^T \|X_t\|_H^2 dt < \infty \right) = 1. \tag{6.15}$$

Der Kern des Beweises soll mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes geführt werden. Dafür muss die rechte Seite von (6.1) eine Kontraktion $K$ auf einem geeigneten vollständigen metrischen Raum definieren, in welchem unter vorerst zusätzlichen Voraussetzungen die potentielle Lösung liegt.

**Lemma 6.22.** *Sei $E_{p,T}$ der Vektorraum der Äquivalenzklassen modulo $\mathbb{P}_T$-f.s. Gleichheit $\mathcal{P}_T$-$\mathcal{B}(H)$-messbarer Prozesse $X : \Omega_T \to H$ mit*

$$\|X\|_{E_{p,T}} := \sup_{t \in [0,T]} \|X_t\|_{L_p(H)} < \infty.$$

*Dann ist $(E_{p,T}, \|\cdot\|_{E_{p,T}})$ ein Banachraum.*

*Beweis.* Übungsblatt 12, Aufgabe 2. *Hinweis:* $\tilde{X}$ im Beweis von Proposition 6.18. □

Zur Erinnerung formulieren und beweisen wir hier noch einmal das Gronwall-Lemma.

**Lemma 6.23** (Gronwall)**.** *Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit der Eigenschaft*

$$f(t) \le a + b\int_0^t f(s)ds, \quad t \ge 0, \tag{6.16}$$

*für Konstanten $a, b \ge 0$. Dann gilt $f(t) \le a\exp(bt)$ für alle $t \ge 0$.*

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ($f$ ist nach Voraussetzung stetig) kann Ungleichung (6.16) geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-bt}\int_0^t f(s)ds\right\} \le ae^{-bt}, \quad t \ge 0.$$

Integration über $[0,t]$ ergibt $e^{-bt}\int_0^t f(s)ds \le ab^{-1}(1-e^{-bt}) \Leftrightarrow a + b\int_0^t f(s)ds \le ae^{bt}$ und zusammen mit (6.16) folgt die behauptete Ungleichung. □

*Beweis von Satz 6.21.* Nach Bemerkung 6.4 sowie der Voraussetzung an $F$ und $B$ existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ und $x, y \in H$

$$\|S(t)\|_{L(H)} \le M \tag{6.17}$$

$$\|F_t(\omega,x) - F_t(\omega,y)\|_H + \|B_t(\omega,x) - B_t(\omega,y)\|_{S_2(U_0,H)} \le M\|x-y\|_H \tag{6.18}$$

$$\|F_t(\omega,x)\|_H + \|B_t(\omega,x)\|_{S_2(U_0,H)} \le M(1+\|x\|_H). \tag{6.19}$$

*Eindeutigkeit:* Seien $X$ und $Y$ milde Lösungen von Gleichung (6.1), welche (6.15) erfüllen. Für $n \in \mathbb{N}$ seien weiter für $Z = X, Y$

$$\tau_n(Z) = \inf\left\{t \ge 0 : \int_0^t \|F_s(Z_s)\|_H ds \ge n \text{ oder } \int_0^t \|B_s(Z_s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds \ge n\right\} \wedge T.$$

Dann ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n = \tau_n(X) \wedge \tau_n(Y)$ eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten mit $\tau_n \nearrow T$ $\mathbb{P}$-f.s. sowie $\mathbb{P}(\tau_n = T) \to 1$ wegen (ii) und (6.15). Mit $\hat{Z}^n_t = \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(t)Z_t$, $t \in [0,T]$, gilt für $Z = X, Y$

$$\begin{aligned}\hat{Z}^n_t = \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(t)S(t)\xi + \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(t)\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)S(t-s)F_s(\hat{Z}^n_s)ds \\ + \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(t)\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)S(t-s)B_s(\hat{Z}^n_s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,T]$, womit nach Bemerkung 2.7, der Itô-Isometrie, (6.17), (6.18) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\|\hat{X}^n_t - \hat{Y}^n_t\|^2_H\big) &\le 2M^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big\|F_s(\hat{X}^n_s) - F_s(\hat{Y}^n_s)\big\|_H ds\right)^2\right] \\ &\quad + 2M^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big\|B_s(\hat{X}^n_s) - B_s(\hat{Y}^n_s)\big\|^2_{S_2(U_0,H)} ds\right]\right. \\ &\le 4M^4(T+1)\int_0^t \mathbb{E}\big(\|\hat{X}^n_s - \hat{Y}^n_s\|^2_H\big)ds\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Nach Definition von $\tau_n$ sowie Propositionen 6.19 und 6.20 (ii) ist die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}\|\hat{X}^n_t - \hat{Y}^n_t\|^2_H$ stetig. Also ist das Gronwall-Lemma anwendbar und ergibt $\mathbb{E}\|\hat{X}_t^n - \hat{Y}_t^n\|_H^2 = 0$ für alle $t \in [0,T]$, insbesondere ist $\int_0^T \mathbb{E}\|\hat{X}_t^n - \hat{Y}_t^n\|_H^2 dt = 0$. Aus dem Satz von Fubini folgt $\hat{X}^n = \hat{Y}^n$ $\mathbb{P}_T$-f.s. und wegen $\tau_n \nearrow T$ sowie $\mathbb{P}(\tau_n = T) \to 1$ auch $X = Y$ $\mathbb{P}_T$-f.s. und $\mathbb{P}(X_t = Y_t) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\hat{X}_t = \hat{Y}_t, t \in [0,\tau_n]) = 1$ für jedes $t \in [0,T]$.

*Existenz:* Wir wollen zunächst unter der zusätzlichen Annahme $\xi \in L_p(H)$ für $p \geq 2$ die Existenz einer Lösung in $E_{p,T}$ zeigen. Für $X \in E_{p,T}$ sei dazu $KX$ definiert durch

$$(KX)_t = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds + \int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s, \quad t \in [0,T].$$

Schritt 1: Wir zeigen als erstes, dass $K$ eine Lipschitz-Abbildung von $E_{p,T}$ nach $E_{p,T}$ ist mit einer Lipschitz-Konstante $C = C(T)$ mit $C(T) \to 0$ für $T \to 0$.

Nach Proposition 6.19 und Proposition 6.20 (i) besitzen die Integrale in der Definition von $K$ vorhersagbare Versionen, womit auch $KX$ einer $\mathcal{P}_T$-messbare Version besitzt. Weiter ist einerseits für jedes $t \in [0,T]$ nach Bemerkung 2.7 und (6.17), (6.19), der Jensen-Ungleichung sowie dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t S(t-s)F_s(X_s)ds\right\|_H^p\right] &\leq M^p\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|F_s(X_s)\|_H ds\right)^p\right] \\
&\leq M^p\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t M\big(1+\|X_s\|_H\big)ds\right)^p\right] \\
&\leq M^{2p}t^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\big[\big(1+\|X_s\|_H\big)^p\big]ds, \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

andererseits nach Satz 5.25 (BDG-Ungleichung) und (6.17), (6.19), der Jensen-Ungleichung und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^t S(t-s)B_s(X_s)dW_s\right\|_H^p\right] &\leq c_pM^p\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \|B_s(X_s)\|_{S_2(U_0,H)}^2 ds\right)^{p/2}\right] \\
&\leq c_pM^{2p}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \big(1+\|X_s\|_H\big)^2 ds\right)^{p/2}\right] \\
&\leq c_pM^{2p}t^{p/2-1}\int_0^t \mathbb{E}\big[\big(1+\|X_s\|_H\big)^p\big]ds. \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

Folglich ist nach der Dreiecksungleichung

$$\|KX\|_{E_{p,T}} \leq M\|\xi\|_{L_p(H)} + M^2\big(T + c_p^{1/p}T^{1/2}\big)\big(1+\|X\|_{E_{p,T}}\big),$$

womit $K : E_{p,T} \to E_{p,T}$ verifiziert ist. Seien nun $X, Y \in E_{p,T}$ und $t \in [0,T]$. Dieselben Schritte wie oben mit jeweils (6.18) statt (6.19) führen zu der Abschätzung

$$\mathbb{E}\big(\|(KX)_t - (KY)_t\|_H^p\big) \leq M^{2p}\big(t^{p-1} + c_pt^{p/2-1}\big)\int_0^t \mathbb{E}\big(\|X_s - Y_s\|_H^p\big)ds, \qquad (6.22)$$

womit

$$\|KX - XY\|_{E_{p,T}} \leq M^2\big(T + c_p^{1/p}T^{1/2}\big)\|X - Y\|_{E_{p,T}}.$$

Schritt 2: Wir beweisen (eindeutige) Existenz in $E_{p,T}$.

Nach Schritt 1 existiert ein $T_1 > 0$ mit $C(T_1) < 1$. Dann ist $K : E_{p,T_1} \to E_{p,T_1}$ eine Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt in $E_{p,T_1}$. Für beliebiges $T$ zerlegt man das Intervall $[0,T]$ in die Intervalle $I_k = [kT_1,(k+1)T_1]$, $k = 1,\ldots,m = \lfloor T/T_1 \rfloor$ und $I_{m+1} = [mT_1, T]$, so dass $K$ auf den sinngemäß definierten Banachräumen $E_{p,I_k}$ eine Kontraktion definiert. Das Existenzproblem wird nun induktiv für die $\mathcal{F}_{T_k}$-messbare Anfangsbedingung $X_{kT_1}$, die die Lösung des vorangehenden Intervalls im Endpunkt $kT_1$ ist, gelöst. Die Zusammensetzung der jeweiligen lokalen Lösungen bildet einen $\mathbb{P}_T$-f.s. eindeutigen Prozess in $E_{p,T}$ ($\to$ Übungsblatt 11, Aufgabe 3).

Schritt 3: Es bleibt zu zeigen, dass auf die bisherige zusätzliche Voraussetzung $\xi \in L_p(H)$ für ein $p \geq 2$ verzichtet werden kann.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei dazu $\Gamma_n = \mathbb{1}_{\{\|\xi\|_H \leq n\}}$. Für festes $p \geq 2$ sei $X^n \in E_{p,T}$ die eindeutige Lösung von

$$X_t^n = \Gamma_n S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\Gamma_n F_s(X_s^n)ds + \int_0^t S(t-s)\Gamma_n B_s(X_s^n)dW_s, \quad t \in [0,T].$$

Dann gilt $\Gamma_m X^n = \Gamma_m X^m \in E_{p,T}$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$, denn alle Prozesse $\Gamma_m X^n$ mit $n \geq m$ lösen dieselbe Gleichung

$$\Gamma_m X_t^n = \Gamma_m S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\Gamma_m F_s(\Gamma_m X_s^n)ds + \int_0^t S(t-s)\Gamma_m B_s(\Gamma_m X_s^n)dW_s, \quad t \in [0,T].$$

Damit existiert $X_t := \lim_{n\to\infty} X_t^n$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$. Ist nun $M \subset \Omega_T$ diejenige Menge, für die $\lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega)$ existiert, so sind $M$ sowie der punktweise Grenzwert $\mathcal{P}_T$-messbarer Abbildungen

$$\tilde{X}_t(\omega) := \mathbb{1}_M(t,\omega) \lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega)$$

$\mathcal{P}_T$-messbar. Wegen $\|X_t^m - X_t\|_H \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$ ist $\tilde{X}$ dann eine $\mathcal{P}_T$-messbare Version von $X$. □

## 6.4. Regularität der Lösung und ihrer Abhängigkeit in der Startvariable

Wir beginnen mit dem Studium des Pfadverhaltens der milden Lösung aus Satz 6.21.

**Satz 6.24.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.21 besitzt die milde Lösung von (6.1) eine stetige Version.*

Für den Beweis benötigen wir eine Reihe an Lemmata. Eine zentrales Hilfsmittel ist dabei die sogenannte Faktorisierungsmethode, um eine stetige Version der stochastischen Faltung zu erhalten.

**Lemma 6.25.** *Für beliebige $p > 1$ und $\alpha > 1/p$ definiert*

$$(G_\alpha z)_t = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) z_s ds$$

*einen beschränkten linearen Operator $G_\alpha : L_p([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda; H) \to \mathcal{C}([0,T]; H)$.*

*Beweis.* Sei $q = p/(p-1)$, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Mit den Bezeichnungen $\mathrm{Id}_{[0,T]}$ für die Identitätsabbildung $t \mapsto t$ auf $[0,T]$ und $L_p(H) = L_p([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda; H)$ gilt dann mit $M$ aus (6.17), nach Bemerkung 2.7 und der Hölder-Ungleichung für jedes $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|G_\alpha z\|_H &\leq \sup_{t\in[0,T]} M \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|z_s\|_H ds \\ &\leq M \left\| \mathrm{Id}_{[0,T]}^{\alpha-1} \right\|_{L_q} \|z\|_{L_p(H)}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Für $s, t \in [0,T]$ ergibt dasselbe Argument angewendet auf die Differenzen

$$\begin{aligned}\|(G_\alpha z)_s - (G_\alpha z)_t\|_H &= \left\| \int_0^T u^{\alpha-1} S(u) \big( \mathbb{1}_{(0,s]}(u) z_{s-u} - \mathbb{1}_{(0,t]}(u) z_{t-u} \big) du \right\|_H \\ &\leq M \left\| \mathrm{Id}_{[0,T]}^{\alpha-1} \right\|_{L_q} \left\| \mathbb{1}_{(0,s]}(\cdot) z_{s-\cdot} - \mathbb{1}_{(0,t]}(\cdot) z_{t-\cdot} \right\|_{L_p(H)}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Für $z \in \mathcal{C}([0,T]; H)$ konvergiert $\mathbb{1}_{(0,s]}(u) z_{s-u} - \mathbb{1}_{(0,t]} z_{t-u}$ für alle $u \neq t$ gegen Null für $s \to t$ und nach dem Satz von der dominierten Konvergenz damit auch (6.24), womit $G_\alpha z \in \mathcal{C}([0,T]; H)$. Nun liegt aber $\mathcal{C}([0,T]; H)$ dicht im Bochnerraum $(L_p(H), \|\cdot\|_{L_p(H)})$ nach Übungsblatt 12, Aufgabe 3. Für beliebiges $z \in L_p(H)$ und $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}([0,T]; H)$ mit $\|z^n - z\|_{L_p(H)} \to 0$ folgt mit der Dreiecksungleichung und (6.23)

$$\|(G_\alpha z)_s - (G_\alpha z)_t\|_H \leq \|(G_\alpha z^n)_s - (G_\alpha z^n)_t\|_H + 2M \left\| \mathrm{Id}_{[0,T]}^{\alpha-1} \right\|_{L_q} \|z - z^n\|_{L_p(H)}$$

und damit die Stetigkeit von $G_\alpha z$ aus der von $G_\alpha z^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Mit demselben Argument wie im Beweis von Lemma 6.14 folgt für $\phi \in \mathcal{N}_W$ die $\mathcal{P}_T$-Messbarkeit der Abbildung $(s, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{(0,t)}(s)(t-s)^{-\alpha} S(t-s) \phi(s, \omega)$, $\alpha < 1/2$.

**Lemma 6.26.** *Seien $p > 2$ und $\xi \in L_p(H)$. Unter den Voraussetzungen (6.18) und (6.19) seien weiter $X$ die in $E_{p,T}$ eindeutige milde Lösung aus Schritt 2 im Beweis von Satz 6.21 sowie $\alpha < 1/2$. Dann gelten folgende Aussagen.*

*(i) Der Prozess $(Y_t^\alpha)_{t\in[0,T]}$ mit*

$$Y_t^\alpha = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s) B_s(X_s) dW_s \tag{6.25}$$

*liegt in $L_p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}; L_p(H))$ mit $L_p(H) = L_p([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \lambda_{|[0,T]}; H)$;*

*(ii) Für $\alpha \in (1/p, 1/2)$ und $Y^\alpha$ aus (6.25) ist*

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} G_\alpha Y^\alpha$$

*eine stetige Version von $W^B = (\int_0^t S(t-s) B_s(X_s) dW_s)_{t\in[0,T]}$.*

Wir verwenden nachfolgend die Youngsche Faltungsungleichung

$$\|f * g\|_{L_p(\lambda)} \leq \|g\|_{L_1(\lambda)} \|f\|_{L_p(\lambda)} \tag{6.26}$$

für $f \in L_p(\lambda)$ und $g \in L_1(\lambda)$, die beispielsweise mit der Hölder-Ungleichung bewiesen werden kann (Übungsblatt 12, Aufgabe 4).

*Beweis.* (i) Aufeinanderfolgende Anwendung des Satzes von Fubini, des Satzes 5.25 (BDG-Ungleichung), (6.17) and (6.19), des Satzes von Fubini, der Youngschen Ungleichung (6.26) und schließlich noch einmal des Satzes von Fubini ergibt

$$\begin{aligned}
\|Y^\alpha\|^p_{L_p(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P};L_p(H))} &= \int_0^T \mathbb{E}\big[\|Y^\alpha_t\|^p_H\big]dt \\
&\leq c_p \int_0^T \mathbb{E}\Bigg[\bigg(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\|S(t-s)B_s(X_s)\|^2_{S_2(U_0,H)}ds\bigg)^{p/2}\Bigg]dt \\
&\leq c_p M^{2p} \int_0^T \mathbb{E}\Bigg[\bigg(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\big(1+\|X_s\|_H\big)^2\big)ds\bigg)^{p/2}\Bigg]dt \\
&= c_p M^{2p}\mathbb{E}\bigg[\Big\|\mathrm{Id}^{-2\alpha}_{[0,T]} * \big(1+\|X\|_H\big)^2\Big\|^{p/2}_{L_{p/2}}\bigg] \\
&\leq c_p M^{2p}\mathbb{E}\bigg[\Big\|\mathrm{Id}^{-2\alpha}_{[0,T]}\Big\|^{p/2}_{L_1}\big\|\big(1+\|X\|_H\big)^2\big\|^{p/2}_{L_{p/2}}\bigg] \\
&= c_p M^{2p}\Big\|\mathrm{Id}^{-2\alpha}_{[0,T]}\Big\|^{p/2}_{L_1}\int_0^T \big(1+\|X_t\|_H\big)^p dt.
\end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung

$$u \mapsto \mathbb{1}_{(s,t)}(u)(t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha}S(t-s)B_s(X_s) \tag{6.27}$$

in $L_1([0,t],\mathcal{B}([0,t]),\lambda;\mathcal{N}^2_W)$ liegt. Wegen

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \bigg(\mathbb{E}\int_0^t \big\|\mathbb{1}_{(s,t)}(u)(t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha}S(t-s)B_s(X_s)\big\|^2_{S_2(U_0,H)}ds\bigg)^{1/2}du \\
&\qquad\leq M\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\bigg(\mathbb{E}\int_0^u (u-s)^{-2\alpha}\|B_s(X_s)\|^2_{S_2(U_0,H)}ds\bigg)^{1/2}du
\end{aligned}$$

mit $M$ aus (6.17) folgt dies aber aus der Itô-Isomterie, der Hölder-Ungleichung mit $q = p/(p-1)$ und der Jensen-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\bigg(\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{(s,t]}(u)(u-s)^{-2\alpha}\|B_s(X_s)\|^2_{S_2(U_0,H)}ds\bigg)^{1/2}du \\
&\quad= \int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\sqrt{\mathbb{E}\big(\|Y^\alpha_u\|^2_H\big)}du \\
&\quad\leq M\Big\|\mathrm{Id}^{\alpha-1}_{[0,T]}\Big\|_{L_q}\bigg(\int_0^t \mathbb{E}\big(\|Y^\alpha_u\|^2_H\big)^{p/2}du\bigg)^{1/p} \\
&\quad\leq M\Big\|\mathrm{Id}^{\alpha-1}_{[0,T]}\Big\|_{L_q}\bigg(\int_0^t \mathbb{E}\big(\|Y^\alpha_u\|^p_H\big)du\bigg)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist endlich nach (i), womit Abbildung (6.27) die Voraussetzung für Satz 5.21 (stochastischer Satz von Fubini) erfüllt. Folglich gilt für

$$(G_\alpha Y^\alpha)_t = \int_0^t (t-u)^{\alpha-1}S(t-u)\bigg(\int_0^u (u-s)^{-\alpha}S(u-s)B_s(X_s)dW_s\bigg)du$$

nach Lemma 5.19 und $S(t-u)S(u-s) = S(t-s)$ wegen der Halbgruppeneigenschaft, Satz 5.21 und nochmal Lemma 5.19 nachfolgende Gleichheit

$$\begin{aligned}(G_\alpha Y^\alpha)_t &= \int_0^t \left( \int_0^u (t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha} S(t-s) B_s(X_s) dW_s \right) du \\ &= \int_0^t \left( \int_s^t (t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha} S(t-s) B_s(X_s) du \right) dW_s \\ &= \int_0^t S(t-s) B_s(X_s) \left( \int_s^t (t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha} du \right) dW_s = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} Y_t^\alpha\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$-f.s. für jedes $t \in [0,T]$, wobei im letzten Schritt die Identität der Beta-Funktion

$$\int_s^t (t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha} du = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha} du = \mathrm{Beta}\,(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \tag{6.28}$$

für $0 \le s \le t$ und $\alpha \in (0,1)$ verwendet wurde. Nach Lemma 6.25 ist $G_\alpha Y^\alpha$ stetig, was (ii) impliziert. □

*Beweis von Satz 6.24.* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $\Gamma_n = \mathbb{1}_{\{\|\xi\|_H \le n\}}$ und $X^n = \Gamma_n X$ mit der Lösung $X$ aus Satz 6.21. Zu beliebigem $p > 2$ wurde in Schritt 3 $X^n$ als $E_{p,T}$-wertige Lösung der trunkierten SPDE

$$X_t^n = \Gamma_n S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\Gamma_n F_s(X_s^n) ds + \int_0^t S(t-s)\Gamma_n B_s(X_s^n) dW_s, \quad t \in [0,T],$$

identifiziert. Das Bochner-Integral $(\int_0^t S(t-s)\Gamma_n F_s(X_s^n)ds)_{t\in[0,T]}$ ist $\mathbb{P}$-f.s. stetig nach Proposition 6.19 und die stochastische Faltung

$$\left( \int_0^t S(t-s)\Gamma_n B_s(X_s^n) dW_s \right)_{t\in[0,T]}$$

besitzt nach Lemma 6.26 (ii) eine stetige Version. Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\lim_n \mathbb{P}\big(\|\xi\|_H \le n\big) = 1$ ist, besitzt folglich auch $X$ selbst eine stetige Version. □

Das nächste Resultat demonstriert eine im quadratischen Mittel stetige Abhängigkeit der milden Lösung von der Startvariable $\xi$, gesetzt den Fall $\xi \in L_2(H)$. Wir bezeichnen nachfolgend den milden Lösungsprozess von (6.1) zur Zeit $t$ mit Startvariable $\xi$ als $X_t(\xi)$.

**Proposition 6.27.** *Unter Voraussetzungen von Satz 6.21 mit $\xi \in L_2(H)$ existiert eine Konstante $C_T > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ gilt:*

*(i)* $\mathbb{E}\big(\|X_t(\xi)\|_H^2\big) \le C_T\big(1 + \mathbb{E}\big(\|\xi\|_H^2\big)\big)$*;*

*(ii)* $\mathbb{E}\big(\|X_t(\xi) - X_t(\eta)\|_H^2\big) \le C_T \mathbb{E}\big(\|\xi - \eta\|_H^2\big)$ *für jedes $\mathcal{F}_0$-messbares $\eta \in L_2(H)$.*

*Beweis.* Nach Schritt 2 aus dem Beweis von Satz 6.21 ist $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\|X_t(\xi)\|_H^2 < \infty$. Seien $\tau_n = \tau_n(\xi) = \inf\{t \ge 0 : \|X_t(\xi)\|_H \ge n\} \wedge T$ und $X_t^{\tau_n} = X_{t\wedge\tau_n}$. Nach Satz 6.24 und dem Satz von der dominierten Konvergenz ist damit $t \mapsto \mathbb{E}\|X_{t\wedge\tau_n}(\xi)\|_H^2$ stetig. Mit $M$

aus (6.17) – (6.19) ergeben Ungleichungen (6.20) und (6.21) in Schritt 1 aus dem Beweis von Satz 6.21 für alle $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\big(\|X_t^{\tau_n}(\xi)\|_H^2\big) \leq 3M\mathbb{E}\|\xi\|_H^2 + 6M^4\big(t + c_2\big) \int_0^t \mathbb{E}\big[1 + \|X_{s\wedge\tau_n}(\xi)\|_H^2\big] ds.$$

Lemma 6.23 (Gronwall-Lemma) liefert dann $\mathbb{E}\|X_{t\wedge\tau_n}(\xi)\|_H^2 \leq C_T(1 + \mathbb{E}\|\xi\|_H^2)$ für alle $n$ und (i) folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. Mit derselben Argumentation für die Differenz mit (6.18) statt (6.19) sowie $\tau_n = \tau_n(\xi) \wedge \tau_n(\eta)$ folgt die Ungleichung

$$\mathbb{E}\|X_t^{\tau_n}(\xi) - X_t^{\tau_n}(\eta)\|_H^2 \leq 3M\mathbb{E}\|\xi - \eta\|_H^2 + 6M^4\big(t + c_2\big) \int_0^t \mathbb{E}\big[1 + \|X_s^{\tau_n}(\xi) - X_s^{\tau_n}(\eta)\|_H^2\big] ds$$

und gleichermaßen mit dem Gronwall-Lemma (ii). □

**Bemerkung 6.28.** *Sind die Koeffizienten $F$ und $B$ hinreichend glatt, lässt sich sogar zeigen, dass der Lösungsprozess in geeignetem Sinne differenzierbar bezüglich der Anfangsbedingung ist.*

## 6.5. Markov-Eigenschaft

Wir setzen das Studium von Eigenschaften der milden Lösung von (6.1) fort, nehmen aber in diesem Abschnitt an, dass $F_t : H \to H$ und $B_t : H \to S_2(U_0, H)$ unabhängig sind von $\omega$ für alle $t \in [0, T]$ sowie $\xi \in L_2(H)$. Ziel ist es, die Markov-Eigenschaft des Lösungsprozesses zu beweisen, wie wir sie aus der endlichdimensionalen stochastischen Analysis kennen.

Sei dazu $X_{t,s}(\xi) = S(t-s)\xi + \int_s^t S(t-u)F_u(X_u)du + \int_s^t S(t-u)B_u(X_u)dW_u$ für $0 \leq s \leq t \leq T$. Dann ist $X_{t,s}(\xi) = \tilde{X}_{t-s}$ mit der im Sinne von Satz 6.21 eindeutigen milden Lösung $\tilde{X}$ von (6.1)

$$\tilde{X}_{t-s} = S(t-s)\xi + \int_0^{t-s} S(t-s-u)F_{u+s}(\tilde{X}_u)du + \int_0^{t-s} S(t-s-u)B_{u+s}(\tilde{X}_u)d\tilde{W}_u, \quad (6.29)$$

wobei $\tilde{W}_u = W_{u+s} - W_s$, $u \geq 0$, die $Q$-Brownschen Bewegung bezüglich der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_u)_{u\in[0,T-s]}$ mit $\tilde{\mathcal{F}}_u = \mathcal{F}_{s+u}$ ist.

**Bemerkung 6.29.** *Für $\mathbb{P}$-f.s. konstantes $\xi = x$, $x \in H$, sind $\tilde{X}$ und damit $(X_{t,s}(x))_{t\in[s,T]}$ messbar bezüglich $\sigma(W_t - W_s : s \leq t \leq T)$ und folglich unabhängig von $\mathcal{F}_s$, denn dies gilt für die Zuwächse $W_t - W_s$ von $W$.*

Sei $B_b(H)$ der Vektorraum beschränkter $\mathcal{B}(H)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbarer Funktionen $f : H \to \mathbb{R}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{B_b(H)} = \|\cdot\|_{\sup}$ ist dieser ein Banachraum. Für $\varphi \in B_b(H)$ und $0 \leq s \leq t \leq T$ definieren wir den Operator $T_{s,t} : B_b(H) \to B_b(H)$ durch

$$T_{s,t}\varphi(x) := \mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(x))\big), \quad x \in H.$$

**Lemma 6.30.** *Für $\varphi \in \mathcal{C}_b(H) = B_b(H) \cap \mathcal{C}(H)$ ist $T_{s,t}\varphi(\cdot)$ unter den Voraussetzungen dieses Abschnittes stetig.*

*Beweis.* Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $H$ mit $\|x_n - x\|_H \to 0$ existiert zu jeder Teilfolge nach Proposition 6.27 (ii) und (6.29) eine Teilteilolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|X_{t,s}(x_{n_k}) - X_{t,s}(x)\|_H \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Aus Stetigkeit und Beschränktheit von $\varphi$ sowie dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt dann $T_{s,t}\varphi(x_{n_k}) \to T_{s,t}\varphi(x)$ und damit die Stetigkeit von $T_{s,t}\varphi(\cdot)$. □

**Satz 6.31** (Markov-Eigenschaft)**.** *Seien $F_t : H \to H$ und $B_t : H \to S_2(U_0, H)$ unabhängig von $\omega$ für alle $t \in [0,T]$, $\xi \in L_2(H)$ und die Voraussetzungen aus Satz 6.21 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,u}(\xi)) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = T_{s,t}(\varphi)(X_{s,u}(\xi)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.30}$$

*für jedes $\varphi \in B_b(H)$ und jedes Tripel $(u, s, t)$ mit $0 \le u \le s \le t \le T$.*

*Beweis.* Nach Lemmata 2.9 und 5.19 sowie der Halbgruppeneigenschaft von $(S(t))_{t\ge 0}$ ist

$$\begin{aligned}
X_{t,u}(\xi) &= S(t-u)\xi + \int_u^t S(t-v)F_v(X_v)dv + \int_u^t S(t-v)B_v(X_v)dW_v \\
&= S(t-s)\Big(S(s-u)\xi + \int_u^s S(s-v)F_v(X_v)dv + \int_u^s S(s-v)B_v(X_v)dW_v\Big) \\
&\quad + \int_s^t S(t-v)F_v(X_v)dv + \int_s^t S(t-v)B_v(X_v)dW_v \\
&= X_{t,s}(X_{s,u}(\xi)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},
\end{aligned}$$

wobei die das letzte Gleichheitszeichen aus der in Satz 6.21 bewiesenen Eindeutigkeit des Lösungsprozesses folgt. Mit $\eta = X_{s,u}(\xi)$ wird (6.30) damit zu

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(\eta)) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = T_{s,t}(\varphi)(\eta) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.31}$$

Wegen $\eta \in L_2(H)$ nach Proposition 6.27 (i) ist es somit ausreichend, (6.31) für beliebige $\mathcal{F}_s$-messbare Zufallsvariablen $\eta \in L_2(H)$ zu beweisen. Da weiter die bedingte Erwartung stetig ist in $L_1 = L_1(H, \mathcal{B}(H), \mathbb{P}^{X_{t,s}(\eta)}; \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}_b(H)$ darin dicht liegt, reicht es zudem, (6.31) für $\varphi \in \mathcal{C}_b(H)$ zu studieren. Für konstantes $\eta = x$ $\mathbb{P}$-f.s. ist nach Bemerkung 6.29 auch die Zufallsvariable $X_{t,s}(x)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Folglich ist

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(x)) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = \mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(x))\big) = T_{s,t}\varphi(x) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Ist $\eta$ von der Gestalt $\eta = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $x_1, \ldots, x_n \in H$, paarweise disjunkten $\mathcal{F}_s$-messbaren Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ist $X_{t,s}(\eta) = \sum_{j=1}^n X_{t,s}(x_j)\mathbb{1}_{A_j}$ $\mathbb{P}$-f.s. und damit

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(\eta) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(x_j)\mathbb{1}_{A_j}) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Da aber die Zufallsvariablen $X_{t,s}(x_j)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ sind und $\mathbb{1}_{A_j}$ $\mathcal{F}_s$-messbar ist für $j = 1, \ldots, n$, folgt weiter

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(\eta)) \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = \sum_{j=1}^n T_{s,t}(\varphi)(X_{t,s}(x_j))\mathbb{1}_{A_j} = T_{s,t}(\varphi)(\eta) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Ist allgemeiner $\eta \in L_2(H)$, so existiert nach Proposition 2.4 (i) eine Folge $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer $H$-Treppenfunktionen mit $\|\eta-\eta_n\|_{L_2(H)} \to 0$ für $n \to \infty$. Da stochastische Konvergenz die $\mathbb{P}$-f.s.-Konvergenz einer Teilfolge impliziert, existiert nach Proposition 6.27 (ii) und (6.29) eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|X_{t,s}(\eta_{n_k}) - X_{t,s}(\eta)\|_H \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für $k \to \infty$. Es folgt $\mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(\eta_{n_k}))\,\big|\,\mathcal{F}_s\big) \to \mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,s}(\eta))\,\big|\,\mathcal{F}_s\big)$ $\mathbb{P}$-f.s. für $k \to \infty$ nach dem Satz von der dominierten Konvergenz für die bedingte Erwartung. Die Stetigkeit von $T_{s,t}\varphi(\cdot)$ impliziert schließlich $T_{s,t}(\varphi)(\eta_n) \to T_{s,t}(\varphi)(\eta)$ $\mathbb{P}$-f.s., womit insgesamt (6.31) folgt. □

**Korollar 6.32** (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)**.** *Für* $0 \le u \le s \le t \le T$ *und alle* $\varphi \in B_h(H)$ *gilt unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts*

$$T_{u,s}\big(T_{s,t}\varphi\big) = T_{u,t}\varphi.$$

*Beweis.* Nach Satz 6.31 ist für $x \in H$

$$T_{u,t}\varphi(x) = \mathbb{E}\big(\varphi(X_{t,u}(x))\big) = \mathbb{E}\mathbb{E}\big[\varphi(X_{t,u}(x))\,\big|\,\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}T_{s,t}\varphi(X_{s,u}(x)) = T_{u,s}\big(T_{s,t}\varphi\big)(x).$$

□

Man kann übrigens noch beweisen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 6.31 der Lösungsprozess sogar die starke Markov-Eigenschaft besitzt.

Es geht weiter mit dem **Seminar im WiSe 2023/24**

**Stochastische (partielle) Differentialgleichungen !**

Dort studieren wir insbesondere das Langzeitverhalten von Lösungen.

# Literatur

[1] Guiseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1992.

[2] Martin Hairer. *An Introduction to Stochastic PDEs*. Lecture notes, Warwick: https://www.hairer.org/SPDEs.pdf. 2009.

[3] Claudia Knoche and Katja Frieler. *Solutions of stochastic differential equations in infinite dimensional Hilbert spaces and their dependence on initial data*. BiBos-Preprint E02-04-083: https://bibos.math.uni-bielefeld.de/preprints/E02-04-083.pdf. 2001.

[4] Wei Liu and Michael Röckner. *Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Springer, 2015.

[5] Ammon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1983.

[6] Gilles Pisier. *Martingales in Banach Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.

[7] Jan van Neerven. *Stochastic evolution equations*. ISEM Lecture notes, Delft: https://fa.ewi.tudelft.nl/ neerven/publications/notes/ISEM.pdf. 2007/08.

# A. Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben

**Blatt 1, Aufgabe 3** Die Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$ ist klar. Für $(ii) \Rightarrow (i)$ sei $f$ der punktweise Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für messbare $f_n$. Ist $\phi : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $\phi \circ f$ der punkweise Grenzwert von $\phi \circ f_n$. Dann ist $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, denn für beliebiges $c \in \mathbb{R}$

$$\{\phi \circ f \geq c\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \phi \circ f_n \geq c\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} \phi \circ f_n \geq c\right\}$$
$$= \left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \phi \circ f_m \geq c\right\} = \bigcap_{n\geq 0} \left\{\sup_{m\geq n} \phi \circ f_m \geq c\right\} \in \mathcal{A}.$$

Sei nun $O \subset B$ eine offene Menge. Dann gilt $O = \phi_O^{-1}((0,\infty))$ für die stetige Funktion $\phi_O : B \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi_O(x) = \mathrm{dist}(x, O^c) = \inf_{y\in O^c} \|x - y\|.$$

Wir erhalten also

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\phi_O^{-1}((0,\infty))\right) = (\phi_O \circ f)^{-1}((0,\infty)) \in \mathcal{A}.$$

Da die offenen Mengen die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(B)$ erzeugen, folgt die Messbarkeit von $f$.

**Blatt 2, Aufgabe 1** Wir wählen zunächst eine abzählbare dichte Teilmenge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\{b \in B \mid \|b\| = 1\}$, was wegen der Separabilität von $B$ möglich ist (abgeschlossene Teilmengen separabler Räume sind separabel). Dazu wählen wir eine Folge $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B^*$ mit $l_n(b_n) = \|b_n\| = 1$ und $\|l_n\|_{B^*} = 1$ - eine solche existiert nach der analytischen Version des Hahn-Banach-Theorems.
Sei nun $b \in B$ beliebig mit $\|b\| = 1$. Dann gilt

$$|l_n(b)| \leq \|l_n\|_{B^*}\|b\| = 1.$$

Wir nehmen an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $|l_n(b)| < 1 - \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|b - b_{n_0}\| < \epsilon/2$ folgt dann

$$|l_{n_0}(b_{n_0})| \leq |l_{n_0}(b)| + |l_{n_0}(b) - l_{n_0}(b_{n_0})| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2},$$

was einen Widerspruch darstellt zu $l_{n_0}(b_{n_0}) = 1$. Somit gilt $\|b\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(b)|$ für alle $b \in B$ mit $\|b\| = 1$. Für beliebiges $b \in B$ folgt die Behauptung aus

$$\|b\| = \|b\| \left\|\frac{b}{\|b\|}\right\| = \|b\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|l_n\left(\frac{b}{\|b\|}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\|b\| l_n\left(\frac{b}{\|b\|}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(b)|.$$

**Blatt 2, Aufgabe 4**

(i) Ist $f \in L_1(B)$, so ist $f$ Bochner-messbar und es gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die $f$ punktweise approximieren. Dann gilt punktweise

$$\|T(f(\omega)) - T(f_n(\omega))\|_{B'} \leq c\|f(\omega) - f_n(\omega)\|_B \to 0,$$

da $T$ beschränkt ist. Also ist $T(f)$ Bochner-messbar, da es von den Treppenfunktionen $T(f_n)$ punktweise approximiert wird. Außerdem gilt

$$\int \|T(f)\|_{B'}\, d\mu \leq c \int \|f\|_B\, d\mu < \infty,$$

da $f \in L_1(B)$. Damit folgt $T(f) \in L_1(B')$.
Sei nun zunächst $g = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} b_i$ eine Treppenfunktion, dann gilt

$$T(g) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} T(b_i)$$

und damit

$$\int T(g) d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) T(b_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i\right) = T\left(\int g d\mu\right).$$

Die Gleichheit der Integrale für allgemeines $f \in L_1(B)$ ergibt sich damit aus der Definition des Integrals als stetige Fortsetzung.

(ii) Da $f$ und $g$ Bochner-messbar sind, existieren Folgen von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass punktweise fast überall $f_n(\omega) \to f(\omega)$ in $B$ und $g_n(\omega) \to g(\omega)$ in $B^*$. Damit konvergiert die Folge $(\langle f_n, g_n\rangle_B)_{n\in\mathbb{N}}$, welche als Treppenfunktion Lebesgue-messbar ist, punktweise fast überall gegen $\langle f, g\rangle_B$. Insbesondere ist daher $\langle f, g\rangle_B$ Lebesgue-messbar. Mit der klassischen Hölder-Ungleichung folgt schließlich

$$\begin{aligned}\int \langle f, g\rangle_B d\mu &\leq \int \|f\|_B \|g\|_{B^*} d\mu \\ &\leq \left(\int \|f\|_B^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \|g\|_{B^*}^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L_p(B)} \|g\|_{L_q(B^*)} < \infty.\end{aligned}$$

**Blatt 3, Aufgabe 1** Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Einheitsball von $B^*$. Dann gibt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche bezüglich der schwach-$*$-Topologie gegen ein $f \in B^*$ konvergiert, d.h. es gilt $f_{n_k}(b) \to f(b)$ für $k \to \infty$ für alle $b \in B$. Da die $f_{n_k}$ Operatornorm $\leq 1$ haben, gilt $|f_{n_k}(b)| \leq \|b\|_B$. Damit ist $\|\cdot\|_B$ eine quadratintegrierbare Majorante in $L^2(\mu)$ nach dem Satz von Fernique. Es folgt also mit dominierter Konvergenz, dass

$$\int (f_{n_k}(b) - f(b))^2 d\mu(b) \to 0,$$

also $f_{n_k} \to f$ in $L^2(\mu)$. Ist nun $g \in B^*$ mit $\|g\|_{B^*} \leq 1$, so folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned}\left|\hat{C}_\mu(f_{n_k} - f)(g)\right| &\leq |C_\mu(f_{n_k} - f, g)| \leq \int |(f_{n_k}(b) - f(b))g(b)| d\mu(b) \\ &\leq \|f_{n_k} - f\|_{L_2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f_{n_k} - f\|_{L_2(\mathbb{R})} \left( \int \|b\|^2 d\mu(b) \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt genutzt haben, dass $|g(b)| \leq \|b\|_B$. Nach dem Satz von Fernique ist $\int \|b\|^2 d\mu(b)$ endlich und offensichtlich unabhängig von $g$. Damit gilt

$$\sup_{g \in B^*: \|g\|_{B^*} \leq 1} \left|\hat{C}_\mu(f_{n_k} - f)(g)\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $\hat{C}_\mu(f_{n_k}) \to \hat{C}_\mu(f)$ in $B^{**}$. Ist nun $(\hat{C}_\mu(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Bild der Einheitskugel von $\hat{C}_\mu$, so haben wir mit dem obigen Argument eine konvergente Teilfolge von dieser gefunden. Damit ist das Bild der Einheitskugel unter dem Operator $\hat{C}_\mu$ präkompakt und $\hat{C}_\mu$ somit kompakt.

**Blatt 4, Aufgabe 3** Wir starten mit $\Rightarrow$. Es sei $Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{A}']$ und $l \in B^*$. Dann ist $l(Y)$ als Verkettung messbarer Funktionen $\mathcal{A}'$-messbar. Außerdem ist $l(Y)$ integrierbar, denn $|l(Y)| \leq \|l\|_{B^*}\|Y\|$ und $Y$ war als Bochner-integrierbar vorausgesetzt. Sei nun $A' \in \mathcal{A}'$. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_{A'} l(Y) d\mathbb{P} = \int_{A'} l(X) d\mathbb{P},$$

dann folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung. Ist $\mathbb{P}(A') = 0$, so ist die Gleichheit klar, wir nehmen also an, dass $\mathbb{P}(A') > 0$ und definieren die bedingte Wahrscheinlichkeit $Q(B) := \mathbb{P}(B|A')$ für $B \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\int Y dQ = \frac{1}{\mathbb{P}(A')} \int Y d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(A')} \int X d\mathbb{P} = \int X dQ,$$

wobei der zweite Schritt gilt, da $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}']$. Nach Lemma 2.9 können wir stetige Linearformen aus dem Integral herausziehen und erhalten

$$\int_{A'} l(Y) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A') \int l(Y) dQ = \mathbb{P}(A') l \left( \int Y dQ \right) = \mathbb{P}(A') l \left( \int X dQ \right) = \int_{A'} l(X) d\mathbb{P},$$

also $l(Y) = \mathbb{E}[l(X)|\mathcal{A}']$ wie gewünscht.
Nun zeigen wir $\Leftarrow$. Es sei $\bar{Y} := \mathbb{E}[X|\mathcal{A}']$. Diese Zufallsvariable ist nach Satz 4.1 wohldefiniert. Dann gilt für $l \in B^*$, dass

$$l(\bar{Y}) = \mathbb{E}[l(X)|\mathcal{A}'] = l(Y) \quad f.s.,$$

wobei der erste Schritt aus der Hinrichtung folgt und der zweite nach Voraussetzung gilt. Es sei nun $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in Aufgabe 1 von Blatt 2, d.h. $\|l_n\|_{B^*} = 1$ und $\|b\|_B =$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(b)|$ für alle $b \in B$. Da die Folge abzählbar ist, finden wir eine Nullmenge $N$, sodass $l(\bar{Y}(\omega)) = l(Y(\omega))$ für alle $l \in \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ und alle $\omega \in N^c$. Damit gilt

$$\|\bar{Y}(\omega) - Y(\omega)\|_B = \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(\bar{Y}(\omega) - Y(\omega))| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n(\bar{Y}(\omega)) - l(Y(\omega))| = 0,$$

für alle $\omega \in N^c$, also $\bar{Y}(\omega) = Y(\omega)$ für $\omega \in N^c$.

## Blatt 5, Aufgabe 2

(i) Dies ist eine Anwendung von Proposition 4.4: Ist $(M_i)_{i\in I}$ ein Martingal, so gilt $\mathbb{E}[M_i|\mathcal{F}_j] = M_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \geq j$. Daraus folgt nun mit besagter Proposition 4.4, dass für jede stetige Linearform $l \in B^*$ gilt, dass $\mathbb{E}[l(M_i)|\mathcal{F}_j] = l(M_j)$, mithin ist $(l(M_i))_{i\in I}$ ein reellwertiges Martingal. Umgekehrt folgt aus der Tatsache, dass es sich bei $(l(M_i))_{i\in I}$ für jedes $l \in B^*$ um ein Martingal handelt, dass für jedes $l \in B^*$ und $i, j \in I$ mit $i \geq j$ gerade $\mathbb{E}[l(M_i)|\mathcal{F}_j] = l(M_j)$, sodass Proposition 4.4 impliziert, dass $\mathbb{E}[M_i|\mathcal{F}_j] = M_j$, $(M_i)_{i\in I}$ also ein Martingal ist.

(ii) Ist $M$ ein Martingal, so ist $(\|M_t\|)_{t\geq 0}$ ein Submartingal nach Proposition 4.6. Mithin sind die Erwartungswerte von $\|M_t\|$ steigend in $t$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|M_{\tau\wedge t}\|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\|M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\|\right] + \mathbb{E}\left[\|M_t \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\|\right] \\
&\leq \sup_{s\leq t} \mathbb{E}\left[\|M_s\|\right] + \mathbb{E}\left[\|M_t\|\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\|M_t\|\right] < \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist $(M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ eine Familie in $L_1(B)$. Nach Teil (i) ist damit für jedes $l \in B^*$ die Familie $(l(M_t))_{t\geq 0}$ ein reelles Martingal und nach dem üblichen Optional Stopping Theorem also auch $(l(M_{\tau\wedge t}))_{t\geq 0}$. Wieder nach Teil (i) ist also $(M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ ein Martingal.

(iii) Nach Teil (ii) ist $(M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ ein Martingal und es gilt $\mathbb{E}[M_{\tau\wedge t}] = \mathbb{E}[M_0]$. Weiter ist

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right] + \mathbb{E}\left[M_t \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right].$$

Der zweite Summand verschwindet für $t \to \infty$ nach Voraussetzung. Da $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, gilt $M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \to M_\tau$ und mit der integrierbaren Majorante $\|M_\tau\|$ folgt mittels dominierter Konvergenz

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau\wedge t}\right] \to \mathbb{E}[M_\tau]$$

und es folgt $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

*Alternative Lösung:* Sei $l \in B^*$. Dann ist $(l(M_t))_{t\geq 0}$ ein Martingal und es gilt

$$\mathbb{E}\left[l(M_\tau)\right] \leq \|l\|_{B^*}\mathbb{E}\left[M_\tau\right] < \infty,$$

sowie mit Lemma 3.11 und $f(0) = 0$, dass

$$\mathbb{E}\left[l(M_t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right] = l\left(\mathbb{E}\left[M_t\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right]\right) \to 0.$$

Damit ist $\mathbb{E}[l(M_\tau)] = \mathbb{E}[l(M_0)]$ nach dem Optional-Sampling-Theorem für reelle Martingale und nach Lemma 3.11 folgt $l(\mathbb{E}[M_\tau]) = l(\mathbb{E}[M_0])$ für alle $l \in B^*$, also $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

(iv) Da $M$ an die Filtration adaptiert ist, gilt $(v \cdot M)_n \in \mathcal{F}_n$, also ist $((v \cdot M)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls an die Filtration adaptiert. Weiter ist jedes $(v \cdot M)_n$ integrierbar denn

$$\mathbb{E}[|(v \cdot M)_n|] \leq 2\|v\|_\infty \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[|M_n|] < \infty.$$

Mit der $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von $(v \cdot M)_{n-1}$ und $v_n$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(v \cdot M)_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(v \cdot M)_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[v_n(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= (v \cdot M)_{n-1} + v_n\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[(v \cdot M)_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= (v \cdot M)_{n-1}.
\end{aligned}$$

**Blatt 8, Aufgabe 1** In der Vorlesung wurde bereits bewiesen, dass $L\phi \in \mathcal{N}_W$. Wir zeigen nun die Identität

$$L\left(\int_0^T \phi(s)dW_s\right) = \int_0^T L(\phi)(s)dW_s$$

in drei Schritten:

(1) Es sei zunächst $\phi$ eine Treppenfunktion, d.h.

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ und $\phi_m : \Omega \to L(U, H)$ eine $\mathcal{F}_{t_m}$-messbare Funktion ist mit $\|\phi_m(\Omega)\| < \infty$ für alle $m = 0, 1, \ldots, k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
L\left(\int_0^T \phi(s)dW_s\right) &= L\left(\sum_{m=0}^{k-1} \phi_m\left(W_{t_{m+1}} - W_{t_m}\right)\right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} L\left(\phi_m\left(W_{t_{m+1}} - W_{t_m}\right)\right) \\
&= \int_0^T L(\phi(s))dW_s.
\end{aligned}$$

(2) Sei nun $\phi \in \mathcal{N}_W^2$. Dann existiert eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit Werten in $L(U_0, H)$, sodass

$$\|\phi - \phi_n\|_T = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|\phi_n(s) - \phi(s)\|^2_{S_2(U_0,H)} ds\right]^{\frac{1}{2}} \to 0$$

für $n \to \infty$ (Proposition 5.15). Dann ist $(L(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit Werten in $L(U_0, \tilde{H})$ und

$$\|L(\phi_n) - L(\phi)\|_T \leq \|L\|_{L(H,\tilde{H})} \|\phi_n - \phi\|_T \to 0.$$

Mit der Definition des stochastischen Integrals, Schritt (1) und Stetigkeit von $L$ erhalten wir die Existenz einer Teilfolge, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}\int_0^T L(\phi(s))dW_s &= \lim_{k\to\infty} \int_0^T L(\phi_{n_k}(s))dW_s \\ &= \lim_{k\to\infty} L\left(\int_0^T \phi_{n_k}(s)dW_s\right) \\ &= L\left(\lim_{k\to\infty} \int_0^T \phi_{n_k}(s)dW_s\right) \\ &= L\left(\int_0^T \phi(s)dW_s\right).\end{aligned}$$

(3) Sei nun $\phi \in \mathcal{N}_W$. Sei weiter $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten, sodass $\tau_n \nearrow T$ und $\phi \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in \mathcal{N}_W^2(H)$. Dann gilt $L(\phi)\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in \mathcal{N}_W^2(\tilde{H})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Aufgabe 3 und Schritt (2) erhalten wir (ggf. für eine Teilfolge) $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}\int_0^T L(\phi(s))dW_s &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} L(\phi(s))dW_s \\ &= \lim_{n\to\infty} L\left(\int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi(s)dW_s\right) \\ &= L\left(\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi(s)dW_s\right) \\ &= L\left(\int_0^T \phi(s)dW_s\right).\end{aligned}$$

**Blatt 8, Aufgabe 3** Wir zeigen nacheinander die Punkte aus dem Hinweis. Aus diesen folgt dann die Aussage, dass die Definition des stochastischen Integrals nicht von der Wahl der Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow T$ und $\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\phi \in \mathcal{N}_W^2$ abhängt. Sei dazu also $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere solche Folge.

a) Sei $t \in [0,T]$. Dann gilt auf der Menge $\{\tau_m \geq t\}$ $\mathbb{P}$-fast sicher, dass

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi(s)dW_s &= \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau_m]}(s)\phi(s)dW_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t\wedge\sigma_n} \mathbb{1}_{(0,\tau_m]}(s)\phi(s)dW_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t\wedge\tau_m} \mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}(s)\phi(s)dW_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t} \mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}(s)\phi(s)dW_s.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt zweimal das Lokalisierungslemma 5.17 verwendet. Lassen wir nun $m \to \infty$, erhalten wir die erste Aussage des Hinweises, also

$$\int_0^t \phi(s)dW_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}(s)\phi(s)dW_s$$

für alle $t \in [0,T]$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

b) Es sei $\tau$ eine $\mathbb{P}$-fast sicher durch $T$ beschränkte Stoppzeit wie in Lemma 5.17. Dann gilt $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \in (0,T]$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau\wedge t} \phi(s)dW_s &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau\wedge t} \mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}\phi(s)dW_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}(s)\phi(s)dW_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)\phi(s)dW_s.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten und letzten Schritt Teil a) benutzt, wohingegen der zweite Schritt wegen des Lokalisierungslemmas 5.17 gilt.

c) Aufgrund von Teil b) gilt $\mathbb{P}$-fast sicher auf $\{\sigma_n \geq t\}$, dass

$$\int_0^t \phi(s)dW_s = \int_0^{\sigma_n\wedge t} \phi(s)dW_s = \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}(s)\phi(s)dW_s.$$

**Blatt 12, Aufgabe 4** Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{1-\frac{1}{p}}dy \\
&= \int (|f(x-y)|^p|g(y)|)^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{1-\frac{1}{p}}dy \\
&\leq \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)|^{(1-\frac{1}{p})\frac{p}{p-1}}dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_1}^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten $p$ und $q = \frac{p}{p-1}$ benutzt. Potenzieren mit $p$ und anschließendes Integrieren liefert dann

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L_p}^p &\leq \int \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right) \|g\|_{L_1}^{p-1}dx \\
&= \|g\|_{L_1}^{p-1} \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|^p dx\right) dy \\
&= \|g\|_{L_1}^{p-1} \int |g(y)| \|f\|_{L_p}^p dy \\
&= \|g\|_{L_1}^p \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.