THORSTEN SCHMIDT

FINANZMATHEMATIK

UNIVERSITÄT FREIBURG

Vorwort

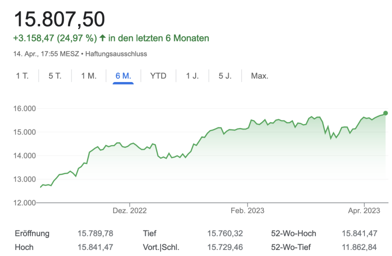
Diese Vorlesung ist aus unseren vorigen Vorlesungen entstanden (in Leipzig, Chemnitz und in vorigen Semestern in Freiburg).

Dieses Skriptum ist vorläufig ! Es enthält offensichtlich noch viele Fehler – also bitte mit dem entsprechenden Fingerspitzengefühl lesen. Für Rückmeldungen sind wir natürlich äußerst dankbar und würden uns über eine Email an das Sekretariat Stochastik.

Thorsten Schmidt

Einführung

Beginnen wir unseren Ausflug in die Finanzmathematik mit einem einfachen Beispiel. Natürlich ist dieses Beispiel zu einfach um realitätsnah zu sein, allerdings lassen sich an diesem Beispiel schon viele grundlegende Mechanismen der Finanzmathematik erläutern.



Eine kurze Historie des DAX laut `google.com` (April 2023)

Ein Binomialmodell mit einem Call

Betrachten wir einen Index mit Wert $S_0 = 15.500$. Sie möchten auf steigende Kurse setzen und ziehen den Kauf eines Calls mit Ausübungspreis (Strike) von $K = 15.800$ in Betracht. Als zugrundeliegendes Modell kommen für Sie zwei zukünftige Szenarien in Frage: der Kurs steigt auf 16.000 oder fällt auf 14.000. Hierzu ordnen Sie (subjektiv, oder aus statistischen Methoden) die Wahrscheinlichkeiten 1/3 und 2/3 zu. Das führt zu folgendem Modell:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 16.000 & \omega = \omega_1, \\ 15.000 & \omega = \omega_2, \end{cases}$$

wobei S_1 der Wert des zufälligen Aktienkurses (Stock) zur Zeit 1 ist. Die Auszahlung des Calls and 1 ist $C_1 := (S_1 - K)^+ = \max\{S_1 - K, 0\}$, also

$$C_1(\omega) = \begin{cases} 300 & \omega = \omega_1, \\ 0 & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Was wären Sie bereit für dieses Derivat zu bezahlen?

Eine Umfrage unter den Teilnehmern des Kurses gibt einige Angebote in der Nähe von 100. Gehen wir also von einem Angebot von 100 aus[1]

Als geschickter Marktteilnehmer kaufe ich den Call und verkaufe gleichzeitig (leer) 0,3 Aktien[2], den verbleibenden Betrag lege ich auf das Bankkonto. Das ergibt folgende Rechnung:

Call kaufen	-100
Erlös aus Aktienverkauf	4.650
Restgeld auf Konto	4.550

[1] Überlegen Sie sich: Ist das zu teuer oder zu billig - dann setzen Sie als Marktteilnehmer auf Ihre Einschätzung.

[2] wieso gerade 0,30?

und alles geht auf. Summe der Ausgaben an $t = 0$ sind 0.

An Zeitpunkt 1 gibt es zwei Möglichkeiten: Angenommen wir beobachten ω_1. Dann hat das Portfolio folgenden Wert:

Call zahlt aus:	300
0.3 Aktie wird gekauft	-4.800
Restgeld auf Konto	4.550
Erlös	50

Für die Beobachtung von ω_2 erhalten wir folgenden Wert:

Call zahlt aus:	0
0.3 Aktie wird gekauft	-4.500
Restgeld auf Konto	4.550
Erlös	50

In jedem Fall gewinne ich mit dieser Strategie 50, und zwar sicher(!). Der Call war offensichtlich 50 Geldeinheiten zu teuer!

Wie kann man sich sicher sein, dass man solche Bewertungsfehler vermeidet? Dies ist ein Hauptziel dieser Vorlesung. Bemerkenswert auch, dass die Wahrscheinlichkeiten gar keine Rolle spielten! Woher bekomme ich die Anzahl der zu verkaufenden Aktien?

Wir werden noch weitere andere interessante Punkte streifen, unter anderem:

- No-Arbitrage Theorie in diskreter Zeit,
- Hedging,
- Risikomaße und deren Schätzung,
- Modellrisiken,
- Zinsmärkte und affine Modelle,
- Konsistente Kalibrierung,
- Unendlichdimensionale Finanzmärkte.

Finanzmärkte in diskreter Zeit

Ein hervorragendes Buch zu diesem Thema ist das Buch von Hans Föllmer und Alexander Schied[3] (am besten in der neuesten Edition). Wir folgen zunächst im wesentlichen diesem Buch, beginnen aber gleich mit dem Mehrperiodenmodell.

[3] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance.* Walter de Gruyter, Berlin, 2011

Die Unsicherheit über zukünftige Preisentwicklung wird mit einem stochastischen Modell dargestellt. Wie man das genau und am Besten macht, um vor allem Unsicherheiten mit einzubauen ist immer noch Gegenstand aktueller Forschung. Wir starten deswegen mit dem einfachsten Fall und fixieren einen festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

In der Praxis ist P typischerweise nicht bekannt, so dass bereits durch diese Annahme ein *Modellrisiko* entsteht. Manche der Resultate (etwa in einem vollständigen Modell wie dem Binomialmodell) werden sogar unabhängig von P formuliert werden können (genauer: lediglich von den Nullmengen von P abhängig).

Für eine Zuvallsvariable X verwenden wir $X \geq 0$ als Abkürzung für $X \geq 0$ P-fast sicher und machen das im Folgenden nicht mehr kenntlich (ebenso natürlich für $=$ und $\leq$).

Einführung

Ein Finanzmarkt besteht aus $d+1$ Wertpapieren, welche alle nichtnegative Werte annehmen. Wir modellieren die Preise der Wertpapiere durch stochastische Prozesse. Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen - hier in diskreter Zeit zum Beispiel $S_0, \dots, S_T$, mit einem festen Zeithorizont T. Wir setzten $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$ wodurch wir die Preisprozesse schreiben können als $S = (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Den Preisprozess des i-ten Wertpapiers bezeichnen wir mit

$$S^i = (S^i_t)_{t \in \mathbb{T}}.$$

Das 0-te Wertpapier ist das sogenannte Bankkonto (oder numéraire), und wir nehmen an, dass $P(S^0_t > 0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Die Marktfiltration

Die zur Verfügung stehende Information wird durch eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ beschrieben, das ist eine wachsende Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$. Im Allgemeinen schreiben wir $\bar{S} = (S^0, S)$ für alle $d+1$ Wertpapiere und $S = (S^1, \ldots, S^d)$ für die d Wertpapiere ohne das Bankkonto.

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=0,\ldots,T}$ heißt *adaptiert*, falls X_t $\mathscr{F}_t$-messbar ist für alle $t = 0, \ldots, T$. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=1,\ldots,T}$ heißt *vorhersehbar*, falls X_t $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar ist für alle $t = 1, \ldots, T$.

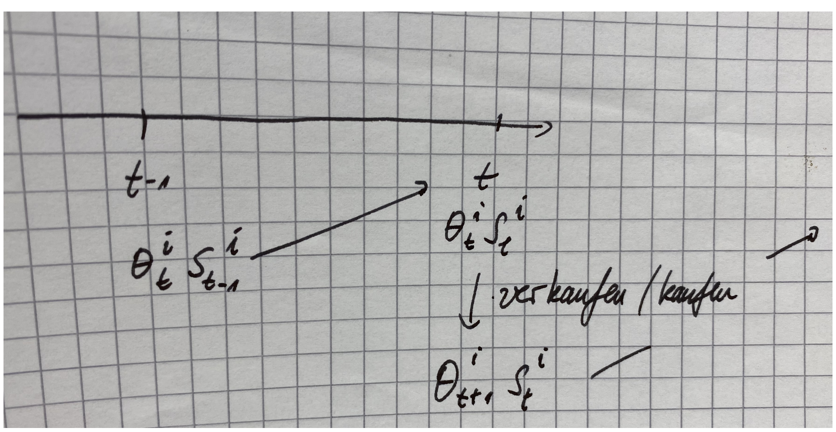
Wir nehmen an, dass die Preise ohne Verzögerung oder zusätzliches Rauschen allen Marktteilnehmern zur Verfügung gestellt werden - demnach ist jeder Preisprozess adaptiert. Fassen wir zusammen: Ein Finanzmarktmodell besteht aus

- Einem Bankkonto mit dem adaptierten, positiven Preisprozess S^0
- und d Wertpapieren mit adaptierten, nichtnegativen Preisprozessen $S^1, \ldots, S^d$.

Handelsstrategien

Definition 1. Eine *Handelsstrategie* $\bar{H}$ ist ein vorhersehbarer, $(d+1)$-dimensionaler stochastischer Prozess. Sie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t, \quad t = 1, \ldots, T-1.$$



Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie wird beim Umschichten des Portfolios kein neues Geld benötigt und der gesamte

Betrag reinvestiert. Wir führen die Notation $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$ für die *Zuwächse* von S ein.

Lemma 2. *Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ und $t \geq 1$ ist*

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 + \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta \bar{S}_k.$$

Beweis. Das sieht man in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t &= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_t \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \sum_{k=2}^{t} \bar{H}_k \cdot (\bar{S}_k - \bar{S}_{k-1}) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\bar{H}$ selbstfinanzierend ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1 &= \bar{H}_1 \bar{S}_1 + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 - \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 \\
&= \bar{H}_1 (\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0
\end{aligned}$$

und Gleichung (1) ist erfüllt. □

Beispiel 3 (Bankkonto)**.** Oft betrachtet man das Bankkonto als Numéraire. Dabei ist $(r_t)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ ein vorhersehbarer Prozess, der den Zins beschreibt. Das Bankkonto startet mit dem Wert $S_0^0 = 1$ und hat an t den folgenden Wert:

$$S_t^0 = \prod_{s=1}^{t} (1 + r_s).$$

Viele Resultate sind bezüglich diesem speziellen Numéraire definiert. Wir nehmen mindestens an, dass $r_s > -1$ für alle $s = 1, \ldots, T$. Typischerweise kann man sogar noch annehmen, dass r vorhersehbar ist und manchmal verlangt man auch nicht-negative Zinsen, also $r \geq 0$. ◇

Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten macht man vergleichbar, indem man mit einer Referenz *diskontiert*. Wir führen den *diskontierten Preisprozess*

$$X_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, \ldots, T, \quad i = 0, \ldots, d$$

ein. Hierbei ist $X_t^0 \equiv 1$ für alle $0 \leq t \leq T$ und die Referenz auf X^0 verschwindet sogar. Starten wir mit einer Handelstrategie $\bar{H}$, so nutzen wir die Notation H für den Verweis auf die letzten d Komponenten von H, verwenden also stets die Darstellung $\bar{H} = (H^0, H)$. Dies sieht man insbesondere in der Darstellung des diskontierten Gewinnprozesses.

Definition 4. Der *diskontierte Wertprozess* $V = V^{\bar{H}}$ der Handelsstrategie $\bar{H}$ ist

$$V_t := \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

und $V_0 := \bar{H}_1 \cdot \bar{X}_0$. Der *diskontierte Gewinnprozess* $G = G^{\bar{H}}$ ist

$$G_t := \sum_{k=1}^{t} H_k \cdot \Delta X_k, \quad t = 1, \ldots, T$$

mit $G_0 = 0$.

Da $X_k^0 - X_{k-1}^0 = 0$ ist, folgt für alle $0 \leqslant t \leqslant T$, dass

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta \bar{X}_k.$$

Weiterhin ist

$$V_t = \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \frac{\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t}{S_t^0}.$$

Satz 5. *Sei $\bar{H}$ eine Handelsstrategie. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\bar{H}$ ist selbstfinanzierend,*

(ii) $\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \ldots, T-1,$

(iii) $V_t = V_0 + G_t \quad$ *für* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Beweis. $\bar{H}$ ist selbstfinanzierend,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t \quad t = 0, \ldots, T-1, \\ \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \frac{\bar{S}_t}{S_t^0} = \bar{H}_{t+1} \frac{\bar{S}_t}{S_t^0}, \quad t = 0, \ldots, T-1, \end{aligned}$$

und somit ist (i) äquivalent zu (ii). Außerdem gilt für alle $t = 0, \ldots, T-1$, dass

$$\begin{aligned} & \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t \\ \Leftrightarrow \quad & \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_{t+1} - \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot (\bar{X}_{t+1} - \bar{X}_t) = H_{t+1}(X_{t+1} - X_t). \end{aligned}$$

Dies ist nun äquivalent zu

$$V_t - V_0 = \sum_{s=1}^{t} H_s(X_s - X_{s-1}), \quad t = 1, \ldots, T$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 6 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)**.** Startet man mit dem Betrag V_0 und einer d-dimensionalen Handelsstrategie H, so kann man eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ bestimmen: Dies geschieht durch die die Wahl von

$$H^0_{t+1} - H^0_t = -(H_{t+1} - H_t) \cdot X_t$$

und $H^0_1 = V_0 - H_1 \cdot X_0$. Sprechen wir im Folgenden von einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H, so meinen wir genau diese eindeutige Erweiterung $\bar{H}$.

Arbitrage

Wir kommen zu dem wichtigen Konzept einer Arbitrage. Das ist im Prinzip eine Möglichkeit, ohne Risiko Gewinne zu erwirtschaften. Natürlich gibt es solche Möglichkeiten an den Finanzmärkten, aber es wäre äußerst ungünstig, wenn ein Modell dies erlauben würde: Die Marktteilnehmer könnten das ausnutzen um auf unsere Kosten risikolose Gewinne zu erzielen! Wir beginnen mit einer präzisen Definition.

Definition 7. Eine *Arbitrage* ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H, so dass für den zugehörigen (diskontierten) Wertprozess V gilt, dass

(i) $V_0 \leqslant 0$,

(ii) $V_T \geqslant 0$ und

(iii) $P(V_T > 0) > 0$.

Ein Finanzmarkt, in dem keine Arbitragemöglichkeiten existierten, heißt *arbitragefrei*.

Für arbitragefrei nimmt man gerne auch die englische Abkürzung NA - no arbitrage. Die Definition ist unter den getroffenen Annahmen dazu äquivalent, dass der undiskontierte Wertprozess die obigen Bedingungen erfüllt (Wieso?).

Satz 8. *Ein Finanzmarkt ist arbitragefrei genau dann, wenn jeder Ein-Perioden-Finanzmarkt* (S_t, S_{t+1}), $t = 0, \ldots, T-1$ *arbitragefrei ist.*

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz der Gegenaussagen: Es existiert eine Arbitrage genau dann, wenn ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ und eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert, s.d. $\xi \cdot \Delta X_t \geq 0$ P-fast sicher und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$.

Wir starten mit der Hinrichtung: Sei $\bar{H}$ eine Arbitrage mit Wertprozess V. Wir setzen

$$t := \min\big\{s \in \{1, \ldots, T\} : V_s \geqslant 0 \text{ und } P(V_s > 0) > 0\big\}$$

mit der Konvention $\min \varnothing = \infty$. Dann ist $t \leqslant T$, da $\bar{H}$ eine Arbitrage ist. Entweder ist $V_{t-1} = 0$, oder $P(V_{t-1} < 0) > 0$. Im ersten Fall gilt:

$$H_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = V_t - V_{t-1} = V_t,$$

also erfüllt $\xi = H_t$ die Voraussetzungen. Im zweiten Fall setzen wir $\xi := H_t \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}$. Dann ist ξ $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar und

$$\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) = (V_t - V_{t-1}) \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant -V_{t-1} \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant 0.$$

Die rechte Seite ist positiv mit positiver Wahrscheinlichkeit, also erfüllt auch in diesem Fall das gewählte ξ die Voraussetzungen.

Nun betrachten wir die Rückrichtung. Sei dafür ξ eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable, so dass $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant$ und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$. Wir setzen:

$$H_s = \begin{cases} \xi & \text{für } s = t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu konstruieren wir mit $V_0 = 0$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 6 mit

$$V_T = \xi \cdot (X_t - X_{t-1}),$$

eine Arbitrage. □

Oft gibt es Arbitrage-Strategien im Markt, und Akteure die solche Möglichkeiten ausnutzen, bringen den Markt wieder ins Gleichgewicht und die Arbitrage verschwindet. Wenn allerdings ein Modell Arbitrage zulässt, so kann dies systematisch ausgenutzt werden (möglicherweise - allerdings kann dies bei einem komplexen, und unbekannten Modell auch fast unmöglich sein, so dass man auch an Modellen mit kleiner Arbitrage interessiert ist, siehe etwa [4]).

[4] Beatrice Acciaio, Julio Backhoff, and Gudmund Pammer. Quantitative fundamental theorem of asset pricing. 2022

Martingalmaße

Es ist interessant, dass sich das Konzept der Arbitrage mit dem wichtigen Konzept der Martingale verbinden lässt, allerdings unter einem geeignet gewählten Maß Q. Wir führen hierzu eine präzise Definition für Martingale ein. Q sei ein Maß auf dem Maßraum $(\Omega, \mathscr{F})$ und wir betrachten nach wie vor die Filtration $\mathbb{F}$ (die wir in der folgenden Definition nicht besonders hervorheben, wohl aber das Maß Q).

Definition 9. Ein stochastischer Prozess M heißt *Q-Martingal*, falls

(i) M ist adaptiert,

(ii) $E_Q[|M_t|] < \infty$ für $t = 0, \dots, T$,

(iii) $M_s = E_Q[M_t | \mathscr{F}_s]$ für $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Dies führt uns nun zu dem Schlüsselkonzept Martingalmaß. Das ist ein Maß unter dem diskontierte Preisprozesse aller gehandelten Wertpapiere Martingale sind.

Definition 10. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ heißt *Martingalmaß*, falls der diskontierte Preisprozess X ein Q-Martingal ist.

Definition 11. Das Maß Q heißt *absolut stetig* zu P ($Q \ll P$) auf $\mathscr{F}_T$, falls

$$P(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(F) = 0 \quad \forall\, F \in \mathscr{F}_T.$$

Die Maße P und Q heißen *äquivalent* ($P \sim Q$), falls $Q \ll P$ und $P \ll Q$.

Der berühmte Satz von Radon-Nikodym behandelt genau die absolut stetigen Maße. Er sagt aus, dass für zwei absolut stetige Maße stets eine Dichte existiert.

Satz 12 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei $Q \ll P$. Dann existiert eine Zufallsvariable $L \geqslant 0$, s.d.*

$$\int \xi dQ = \int \xi L dP \tag{13}$$

für alle Zufallsvariablen $\xi \geqslant 0$.

Für den Beweis verweisen wir etwa auf [5] (dieser wurde auch in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt). Wir schreiben in diesem Fall kurz $dQ = LdP$ oder für die Dichte $L = \frac{dQ}{dP}$.

[5] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, 3 edition, 1995

Satz 14 (Bayes-Theorem)**.** *Sei $Q \ll P$ mit Dichte L. Dann gilt für $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$, dass*

$$E_P[L|\mathscr{F}'] \cdot E_Q[\xi|\mathscr{F}'] = E_P[L \cdot \xi|\mathscr{F}'] \quad P-f.s.$$

Beweis. Wir wählen $F \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}\int_F E^P[L \cdot \xi|\mathscr{F}']dP &= \int_F \xi \cdot LdP = \int_F \xi \cdot dQ = \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']dQ \\ &= \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']LdP \\ &= \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}'] \cdot E^P[L|\mathscr{F}']dP. \square\end{aligned}$$

Der diskontierte Preis-Prozess X ist genau dann ein Q-Martingal, falls Integrierbarkeit gilt und für $i = 1, \dots, N$

$$E_Q\Big[\frac{S_t^i}{S_t^0}|\mathscr{F}_s\Big] = \frac{S_s^i}{S_s^0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Martingalmaße und L^p-Räume

Die Menge der *äquivalenten Martingalmaße* bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_e(\mathbb{F}) = \mathscr{M}_e$. Die Menge der $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen X für die $E_P[|X|^p] < \infty$ gilt, bezeichnen wir mit $\mathscr{L}^p(P, \mathscr{F})$. Für $p = \infty$ erhalten wir die Klasse der beschränkten Zufallsvariablen und für $p = 0$ die Klasse der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen. Darüber hinaus bezeichen wir mit $\mathscr{L}^0_+(P, \mathscr{F})$ die Menge der positiven $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen.

Zufallsvariablen unter Momentenbedingungen führen zu den L^p-Klassen von messbaren Abbildungen, die in der Funktionalanalysis eine wichtige Rolle spielen, siehe etwa [6]. Wir unterschieden die Abbildungen selbst ($\mathscr{L}^p$-Räume) von ihren Äquivalenzklassen (L^p-Räume). Wir beginnen mit den Abbildungen. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definieren wir den Raum der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen (also aller Zufallsvariablen) mit Werten in $\mathbb{R}^d$ durch $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbb{R}^d)$. Wenn je nach Kontext einige der Argumente klar sind, lassen wir dementsprechend diese weg und schreiben etwa[7] $\mathscr{L}^0$. Mit $\mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^0$ definieren wir diejenige Teilmenge von Zufallsvariablen mit p-ten Momenten, wo also $\|Z\|_p < \infty$, mit

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[|Z|^p]^{1/p} & \text{für } 0 < p < \infty \\ \inf\{c > 0 : P(|Z| > c) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

[6] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000

[7] Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die L^p-Räume Banachräume. Auf dem Raum L^0 betrachten wir die Metrik, die die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit erzeugt,

$$d(X, Y) = E[|X - Y| \wedge 1].$$

Entsprechend definieren wir für $p \in [0,\infty]$ den Raum L^p als die zugehörigen Äquivalenzklassen definiert durch

$$Z \sim Z' \qquad \Leftrightarrow \qquad P(Z = Z') = 1.$$

Der Fundamentalsatz

Für den Fundamentalsatz starten wir mit einigen Vorbereitungen.

Satz 15. *Sei $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Q ist Martingalmaß.

(ii) Für jede beschränkte, selbstfininanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q-Martingal.

(iii) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $E_Q[(V_T^{\bar{H}})^-] < \infty$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q- Martingal.

(iv) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $V_T = V_T^{\bar{H}} \geqslant 0$ gilt

$$V_0 = E_Q[V_T].$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\bar{H}$ selbstfinanzierend mit $|H_t^i| \leqslant c$, für $i = 0, \dots, d$, $t = 0, \dots, T$. Dann folgt, dass

$$|V_t| \leqslant |V_0| + \sum_{k=1}^{t} c \cdot \sum_{i=1}^{d} \Big(|X_k^i| + |X_{k-1}^i| \Big),$$

so dass $V_t \in L^1(Q)$ für $t \in \mathbb{T}$ folgt. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] &= E_Q[V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (E_Q[\bar{X}_t|\mathscr{F}_{t-1}] - \bar{X}_{t-1}) = V_{t-1}. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Wir beobachten, dass

$$E_Q[V_{T-1}^-] = E_Q[E_Q[V_T|\mathscr{F}_{T-1}]^-] \leqslant E_Q[E_Q[V_T^-|\mathscr{F}_{T-1}]] = E_Q[V_T^-] < \infty$$

mit der Jensenschen Ungleichung und es folgt $E_Q[V_t^-] < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$.

$E_Q[V_t^-] < \infty$ impliziert, dass $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$ wohldefiniert ist, auch wenn diese Erwartungswerte ∞ annehmen können. Sei nun $a > 0$, $\bar{H}$ selbstfinanzierend und $H_t^a := H_t 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}$.

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}]1_{\{|H_t| \leqslant a\}} &= E_Q[\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= E_Q[\bar{H}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})1_{\{|H_t| \leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] + V_{t-1}1_{\{|H_t| \leqslant a\}} \\ &= V_{t-1}1_{\{|H_t| \leqslant a\}}. \end{aligned}$$

Mit $a \uparrow \infty$ folgt also $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$ und somit V ist unter Q ein Martingal.

iii) $\Rightarrow$ iv): Klar.

iv) $\Rightarrow$ i): Zuerst zeigen wir die Integrierbarkeit von X_t^i. Wir betrachten die selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H)$, gegeben durch

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s \le t\}}$$

und $H_s^j = 0$ für alle $s \in \mathbb{T}$ und $j \neq i$. Wir starten mit dem Anfangskapital $V_0 = X_0^i$ und erhalten, dass

$$V_T = X_t^i \geqslant 0.$$

Diese Handelsstrategie erfüllt also die Voraussetzung für (iv), so dass

$$X_0^i = V_0 = E_Q[V_T] = E_Q[X_t^i] = E_Q[|X_t^i|] < \infty, \tag{16}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $\infty > V_0 = E_Q[|X_t^i|]$ folgt. Wir zeigen als nächstes, dass

$$E_Q[X_{t+1}^i 1_F] = E_Q[X_t^i 1_F] \qquad \forall F \in \mathscr{F}_t.$$

Dazu wählen wir

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s<t\}} + \mathbb{1}_{F^C} 1_{\{s=t\}},$$

$H^j = 0$ für $j \neq i$ und konstruieren mit $V_0 = X_0^i$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 6. Wir erhalten für den Endwert dieser Handelsstrategie, dass

$$V_T = \mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i \geq 0,$$

so dass ebenfalls die Voraussetzungen für (iv) erfüllt sind. Daraus folgt, dass

$$X_0^i = E_Q[V_T] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i].$$

Zusammen mit Gleichung (16) erhalten wir

$$E_Q[X_t^i] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i],$$

also $E_Q[1_F X_t^i] = E_Q[1_F X_{t+1}^i]$, und die Behauptung folgt. □

Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung

Der folgende Satz ist der wichtigste Satz unserer Vorlesung. Wir nennen ihn den Hauptsatz der Wertpapierbewertung (Fundamental Theorem of Asset Pricing, FTAP). Mit $\mathscr{M}_e(\mathbb{F}) = \mathscr{M}_e$ bezeichnen wir die Menge der äquivalenten (equivalent) $\mathbb{F}$-Martingalmaße.

Theorem 17. *Ein Markt ist genau dann frei von Arbitrage, falls ein äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Fall existiert ein $Q \in \mathscr{M}_e$ mit beschränkter Dichte $\frac{dQ}{dP}$.*

Wir beweisen den Hauptsatz in mehreren Schritten. Die Rückrichtung stellt sich als überraschend leicht heraus. Sie ist auch die in der Anwendung am meisten verwendete Anwendung des Satzes.

Satz 18. *Ist $\mathscr{M}_e \neq \varnothing$, so ist der Markt frei von Arbitrage.*

Beweis. Wir verwenden Satz 15 (iii) und zeigen einen Widerspruch. Sei hierzu H eine Arbitrage mit diskontiertem Wertprozess V. Wir wählen ein $Q \in \mathscr{M}_e$.

Aus $V_0 \leqslant 0$ P-f.s. folgt auch $V_0 \leqslant 0$ Q-f.s. Ebenso $V_T \geq 0$ Q-f.s. Es folgt $E_Q[V_T^-] = 0 < \infty$.

Weiterhin ist $P(V_T > 0) > 0$, also auch $Q(V_T > 0) > 0$, also $E_Q[V_T] > 0$. Mit Satz 15 (iii) erhalten wir, dass V ein Q-Martingal ist, also

$$V_0 = E_Q[V_T] > 0,$$

ein Widerspruch zu $V_0 \leqslant 0$. □

Wir kehren zurück zum Beweis des Hauptsatzes. Nach Satz 8 reicht es, Arbitrage in jeder Periode zu untersuchen. Wir fixieren ein $t \in \mathbb{T}$ mit $t > 0$ und definieren:

$$K = \{H \cdot \Delta X_t : \ H \in L^0(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)\}.$$

Dies sind alle bedingten Ansprüche, die wir zum Preis Null erreichen können. Dann können wir No-Arbitrage auch äquivalent ausdrücken durch

$$K \cap L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Da t fixiert ist, schreiben wir im Folgenden kurz $L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = L^0_+$. Für zwei Mengen A und B bezeichen wir mit

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}$$

die direkte Summe dieser Mengen und analog mit $A - B$ die direkte Differenz.

Satz 19. *Sei $t \in \mathbb{T}$ fixiert. Wir betrachten den Ein-Periodenmarkt von $t-1$ nach t. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $K \cap L^0_+ = \{0\}$,

(ii) $(K - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$,

(iii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß mit beschränkter Dichte,

(iv) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis. Wir zeigen (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (iv), der Teil (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist der Hauptteil des Beweises und wird im Anschluss studiert.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $Q \in \mathscr{M}_e$. Wir zeigen einen Widerspruch. Dazu sei H eine $\mathscr{F}_{t-1}$-messbare, d-dimensionale Zufallsvariable, so dass $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant 0$ und $P(H \cdot (X_t - X_{t-1}) > 0) > 0$. Dann ist ebenso $Q(H \cdot (X_t - X_{t-1})) > 0$ und somit auch $E_Q[H \cdot (X_t - X_{t-1})] > 0$.

Nach Satz 15 (iii) ist V^H ein Q-Martingal und insbesondere $E_Q[H \cdot (X_t - X_{t-1})] = 0$, ein Widerspruch.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir betrachten ein $Z \in (K - L^0_+) \cap L^0_+$. Dann existiert ein $\mathscr{F}_{t-1}$-messbares H und $U \in L^0_+$, s.d.

$$Z = H \cdot (X_t - X_{t-1}) - U \geqslant 0.$$

Es gilt also $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant U \geqslant 0$, und somit $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \in K \cap L^0_+$. Nach (i) folgt $H \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0$, also $U = 0$ und somit $Z = 0$.

Die weiteren Aussagen (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgen unmittelbar. $\square$

Wir zeigen nun, dass es genügt, sich auf integrierbare Zufallsvariablen X_t und X_{t+1} zu konzentrieren.

Lemma 20. *Für den Schritt (ii) $\Rightarrow$ (iii) reicht es $E[|X_t|] < \infty$, $E[|X_{t-1}|] < \infty$ zu betrachten.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst $\widetilde{P} \sim P$, so dass die Erwartungswerte existieren. Sei dazu $c > 0$ und

$$Z := \frac{c}{1 + |X_t| + |X_{t-1}|} \leqslant c$$

eine positive Dichte und $d\widetilde{P} = Z dP$. Offensichtlich ist $\widetilde{E}[|X_t|] < \infty$ und $\widetilde{E}[|X_{t-1}|] < \infty$. Die Bedingung (ii) hängt nur von den Nullmengen von P ab, also gilt (ii) genau dann, wenn es für $\widetilde{P}$ gilt. Ist $Q^* \in \mathscr{M}_e$, so ist

$$\frac{dQ^*}{dP} = \frac{dQ^*}{d\widetilde{P}} \cdot \frac{d\widetilde{P}}{dP} = \frac{dQ^*}{d\widetilde{P}} \cdot Z.$$

Die Dichte von Q^* bezüglich P ist demnach genau dann beschränkt, wenn sie es bezüglich $\widetilde{P}$ ist. $\square$

Im Folgenden können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $E[|X_t|] < \infty$ und $E[|X_{t-1}|] < \infty$ ausgehen.

Wir werden Erwartungswerte für eine Klasse von Zufallsvariablen betrachten, z.B. bedingte Erwartungen. Wir definieren den konvexen Kegel

$$C = (K - L^0_+) \cap L^1.$$

Lemma 21. *Sei $c \geqslant 0$ und $Z \in L^\infty(P, \mathscr{F}_t)$, so dass*

$$E[ZW] \leqslant c \qquad \text{für alle } W \in C. \tag{22}$$

Dann gilt:

(i) $E[ZW] \leqslant 0$ für alle $W \in C$,

(ii) $Z \geqslant 0$ P-f.s.,

(iii) Ist $P(Z > 0) > 0$, so ist durch

$$\frac{dQ}{dP} := Z$$

ein Martingalmaß (und $Q \ll P$) definiert.

Beweis. (i) C ist ein Kegel, denn mit $W \in C$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha W \in C$. Dann ist

$$E[\alpha ZW] = \alpha \cdot E[ZW] \leqslant \alpha c.$$

Wir erhalten, dass diese Gleichung bereits für $c = 0$ gelten muss.

(ii) Wir wählen $W = -\mathbb{1}_{\{Z<0\}}$. Dann ist

$$E[Z_-] = E[ZW] \leqslant 0,$$

also $Z_- = 0$ und somit $Z \geq 0$ P-f.s.

(iii) Wir wählen H in $L^\infty(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und setzen $Y = (X_t - X_{t-1}) \in C$. Dann ist

$$E[ZHY] \leqslant c \quad \text{und} \quad E[\alpha ZHY] \leqslant c,$$

so dass wie oben $E[ZHY] \leqslant 0$ folgt. Außerdem ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha E[ZHY] \leqslant 0,$$

also $E[ZHY] = 0 = E[H(X_t - X_{t-1})]$. Wir erhalten $E^Q[\mathbb{1}_F(X_t^i - X_{t-1}^i)] = 0$ für alle $F \in \mathscr{F}_{t-1}$, also ist X Q-Martingal. □

Exkurs: Hahn-Banach auf lokal konvexen Raumen

Ein *topologischer Vektorraum E* ist ein Vektorraum mit einer Topologie, so dass gilt:

(i) die Addition ist stetig,
(ii) die Skalarmultiplikation ist stetig.

Wir nennen einen topologischer Vektorraum E *lokal konvexen Raum*, falls seine Topologie von einer Basis aus konvexen Mengen erzeugt wird. Für weitere Informationen hierzu sei auf [8] verwiesen.

[8] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000

Theorem 23 (Hahn-Banach). *Seien B und C nicht-leere Teilmengen des lokal konvexen Raumes E und*

(i) $B \cap C = \varnothing$,
(ii) B, C konvex,
(iii) B kompakt, C abgeschlossen.

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{R}$, so dass

$$\sup_{x \in C} \ell(x) < \inf_{x \in B} \ell(x).$$

Nach Lemma 21 reduziert sich der Beweis des Hauptsatzes auf Konstruktion eines positiven Elements von

$$\mathcal{Z} := \{Z \in L^\infty,\ 0 \leqslant Z \leqslant 1,\ P(Z > 0) > 0,\ E[ZW] \leqslant 0\ \forall W \in C\}$$

mit dem konvexen Kegel $C = (K - L^0_+) \cap L^1$. Wir nehmen zunächst an, dass C abgeschlossen ist, so dass wir den Satz von Hahn-Banch anwenden können.

Lemma 24. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1, und $C \cap L^1_+ = \{0\}$. Dann existiert für alle $F \in L^1_+ \setminus \{0\}$ ein $Z \in \mathcal{Z}$, s.d. $E[FZ] > 0$.*

Beweis. Sei $B = \{F\}$, s.d. $B \cap C = \varnothing$, $C \neq \varnothing$, beide Mengen sind konvex, B ist kompakt und C abgeschlossen nach Voraussetzung.

Mit dem Satz von Hahn-Banach existiert ein stetiges lineares Funktional ℓ, s.d.

$$\sup_{W \in C} \ell(W) < \ell(F)$$

Der Dualraum L^1 kann mit L^∞ identifiziert werden, s.d. $Z \in L^\infty$ existiert mit

$$\ell(F') = E[Z \cdot F'], \qquad F' \in L^1.$$

O.B.d.A. $\|Z\|_\infty = 1$. Es folgt $E[ZW] < E[ZF]$ $\forall W \in C$, so dass Z die Voraussetzungen von Lemma 21 erfüllt. Es folgt, dass $Z \in \mathcal{Z}$. Mit $0 = W \in C$ erhalten wir $E[FZ] > 0$. □

Der nächste Schritt ist es, ein $Z^* > 0$ auszuwählen.

Lemma 25. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1 und*

$$C \cap L^1_+ = \{0\}.$$

Dann existiert $Z^* \in \mathcal{Z}$ mit $Z^* > 0$ P-f.s.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{Z}$ abzählbar konvex ist: Das heisst für alle $\alpha_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = 1$, und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$, gilt, dass

$$Z := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k Z_k \in \mathcal{Z}.$$

Dies sieht man wie folgt: Für $W \in C$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k Z_k W| \leqslant |W| \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k| = |W| \in L^1.$$

Mit dominierter Konvergenz erhalten wir

$$E[ZW] = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k E[Z_k W] \leqslant 0$$

und somit ist $Z \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}$ ist in der Tat abzählbar konvex. Setze

$$c := \sup\{P(Z > 0) : Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Wir wählen eine Folge $(Z_n) \in \mathcal{Z}$, so dass $P(Z_n > 0) \to c$. Dann ist

$$Z^* := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Z_k \in \mathcal{Z}$$

nach der obigen Beobachtung. Darüber hinaus ist $\{Z^* > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k > 0\}$, also

$$P(Z^* > 0) \geqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} P(Z_k > 0) = c.$$

Wir zeigen die Behauptung mit einem Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass $P(Z^* = 0) > 0$. Dann ist $F := 1_{\{Z^*=0\}} \neq 0$ und $F \in L^1_+$. Nach Lemma 24 gibt es $Z' \in \mathcal{Z}$, s.d.

$$0 < E[FZ'] = E[1_{\{Z^*=0\}} Z'].$$

also $P(\{Z' > 0\} \cap \{Z^* = 0\}) > 0$. Dann ist

$$P\Big(\frac{1}{2}(Z' + Z^*) > 0\Big) > P(Z^* > 0)$$

ein Widerspruch zur Maximalität von Z^* und es folgt in der Tat $P(Z^* > 0) = 1$. □

Das folgende Lemma erlaubt uns aus einer Folge eine messbare und konvergente *Teilfolge* auszuwählen. Es ist eine Verallgemeinerung des Satzes von *Bolzano-Weierstraß*[9] auf unendlichdimensionale Räume, wie wir sie hier betrachten. Typischerweise reicht im Unendlichdimensionalen Beschränktheit nicht mehr, weswegen wir Existenz eines endlichen Häufungspunktes fordern.

[9] Hierüber gibt es eine sehr schöne Wikipedia-Seite.

Lemma 26. *Sei (H_n) eine Folge von d-dim. Zufallsvariablen mit $\liminf_n |H_n| < \infty$. Dann gibt es ein $H \in L^0(\mathbb{R}^d)$ und eine strikt monoton wachsende Folge (σ_m) von ganzzahligen Zufallsvariablen, so dass*

$$H_{\sigma_m(\omega)}(\omega) \to H(\omega)$$

für P-fast alle ω.

Beweis. Wir konstruieren die Teilfolge punktweise, so dass wir das Resultat auf den klassischen Bolzano-Weierstraß zurückführen können. Zunächst konstruieren wir eine Teilfolge so, dass $(|H_{\sigma_m^0}|)$ gegen den kleinsten Häufungspunkt $\lambda := \liminf_n |H_n|$ konvergiert (und zwar für fast alle $\omega \in \Omega$). Dann betrachten wir nacheinander jede Koordinate und beschleunigen die Folgen jeweils so, dass auch jede Koordinate konvergiert.

Sei $\sigma_m = m$ auf $\{\lambda = \infty\}$. Auf $\{\lambda < \infty\}$ definieren wir $\sigma_1^0 := 1$ und

$$\sigma_m^0(\omega) := \inf\left\{n > \sigma_{m-1}^0(\omega) : \ ||H_n(\omega)| - \lambda(\omega)| \leqslant \frac{1}{m}\right\} \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Sei $H^i := \liminf_{m\to\infty} H^i_{\sigma_m^{i-1}}$ $i = 1, \ldots, d$. Sei $\sigma_1^i = 1$ und

$$\sigma_m^i(\omega) := \inf\left\{\sigma_n^{i-1}(\omega) : \ \sigma_n^{i-1}(\omega) > \sigma_{m-1}^i(\omega) \quad \text{und} \quad |H^i_{\sigma_n^{i-1}(\omega)}(\omega) - H^i(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

$\sigma_m := \sigma_m^d$ auf $\{\lambda < \infty\}$ gibt die gesuchte Folge. □

Eigentlich wären wir schon fast am Ziel unsere Beweises angelangt, allerdings können zwei verschieden Portfolien zu dem gleichen Endwert führen, oder: anders formuliert, es könnte sein, dass

$$H(X_t - X_{t-1}) = 0$$

gilt obwohl $H \neq 0$. Dieses Problem überwinden wir mit geeigneten Orthogonalkomplementen. Für das folgende Lemma versehen wir L^0 mit der Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit[10], erzeugt von der Halbmetrik $d(X, Y) := E[|X - Y| \wedge 1]$.

[10] Auch hier gibt es einen Wikipedia-Artikel, `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvergenz_in_Wahrscheinlichkeit`.

Lemma 27. *Wir definieren:*

$$N = \{H \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ H(X_t - X_{t-1}) = 0 \quad P - f.s.\}$$
$$N^\perp = \{G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ G \cdot H = 0 \text{ für alle } H \in N\}$$

Dann gilt

(i) $N, N^\perp$ *sind abgeschlossen in* L^0, *und* $gH \in N$, *falls* $H \in N$, $g \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R})$, *sowie* $gG \in N^\perp$ *falls* $G \in N^\perp$.

(ii) $N \cap N^\perp = \{0\}$.

(iii) Jedes $G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P, \mathbb{R}^d)$ *hat die eindeutige Zerlegung:*

$$G = H + G^\perp, \quad H \in N, \ G^\perp \in N^\perp.$$

Beweis. (i) Gilt $H_n \xrightarrow{P} H$, so gibt es eine f.s. konvergiernde Teilfolge (H_{σ_m}). Dann gilt:

$$H_{\sigma_m}(\omega) \cdot (X_t(\omega) - X_{t-1})(\omega) \to H(\omega)(X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)) \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega. \tag{28}$$

Ist $(H_n) \subseteq N$ eine Folge von Elemente aus N mit $H_n \to H$ f.s., so folgt, dass die linke Seite von (28) gleich Null ist, also auch der Grenzwert (die rechte Seite) und somit ist $H \in N$.

Ebenso folgt aus $(G_k) \subseteq N^\perp$ mit $G_n \to^{f.s.} G$, dass $G \in N^\perp$, so dass N und $N^\perp$ abgeschlossen sind.

Aus $H \Delta X = 0$ folgt, dass $gH\Delta X = 0$, also ist $gH \in N$ und ebenso folgt $gG \in N^\perp$.

(ii) Angenommen $G \in N \cap N^\perp$, dann folgt:

$$0 = G \cdot G = |G| \Leftrightarrow G = 0 \quad P\text{-f.s..}$$

(iii) Für $\xi \in \mathbb{R}^d$ stellen wir ξ dar als $\xi = \xi^1 e_1 + \cdots + \xi^d e_d$ mit einer Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Nehmen wir zunächst an, dass $e_i = n_i + e_i^\perp$ mit $n_i \in N$ und $e_i^\perp \in N^\perp$. Dann ist:

$$\xi = \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi n_i}_{\in N} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi_i e_i^\perp}_{\in N^\perp}$$

Die Zerlegung ist eindeutig, da $N \cap N^\perp = \{0\}$.

Wir zeigen noch $e_i = n_i + e_i^\perp$. Dazu betrachten wir den Hilbertraum $L^2 = L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P; \mathbb{R}^d)$ mit Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = E[XY]$. Sowohl $N \cap L^2$ als auch $N^\perp \cap L^2$ sind abgeschlossene Unterräume von L^2, da stochastische Konvergenz L^2-Konvergenz impliziert und wir bereits Abgeschlossenheit von N und $N^\perp$ gezeigt haben. Wir definieren die orthogonalen Projektionen

$$\pi : L^2 \to N \cap L^2, \quad \pi^\perp : L^2 \to N^\perp \cap L^2$$

und setzen $n_i = \pi(e_i)$, $e_i^\perp = \pi^\perp(e_i)$.

Nun betrachten wir $\xi := e_i - \pi(e_i)$. Da $\pi(e_i)$ die orthogonale Projektion ist, gilt

$$\langle \xi, n \rangle = 0 \tag{29}$$

für alle $n \in N \cap L^2$. Zunächst ist $e_i \in L^2$ und ebenfalls $\pi(e_i)$, also ist $\xi \in L^2$. Wir zeigen, dass $\xi \in N^\perp$: Angenommen, $\xi \notin N^\perp \cap L^2$. Dann gibt es ein $H \in N$ mit $P(\xi \cdot H > 0) > 0$. Setze

$$\widetilde{H} := H \mathbb{1}_{\{\xi \cdot H > 0\ ,\ |H| \leqslant c\}} \in N \cap L^2$$

für ein noch zu wählendes c. Ist c groß genug, so gilt

$$0 < E[\widetilde{H} \cdot \xi] = \langle \widetilde{H}, \xi \rangle,$$

ein Widerspruch zu (29).

□

Beispiel 30 (C ist nicht abgeschlossen). Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F}_1 =$ Borel-σ-Algebra, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Delta X(\omega) = \omega$ (dies ist offensichtlich ein Markt mit Arbitrage).

Zunächst ist C eine echte Teilmenge von L^1: Ist $F \geqslant 1$, so ist F nicht aus C!

Wir betrachten

$$F_n = (F^+ \cap n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} - F^- \quad \text{für } F \in L^1$$

und somit gilt $F_n \xrightarrow{L^1} F$. Weiterhin ist $F_n \in C$, da

$$(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant \begin{cases} n & \omega \in [1/n, 1], \\ 0 & \omega \in [0, 1, n). \end{cases}$$

und somit $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant n \cdot n\Delta X = n^2 \Delta X$. $\Delta X \geqslant 1/n \iff n\Delta X \geqslant 1$ auf $\omega \geqslant 1/n$, also $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} = U + n^2\Delta X$ mit $n \geqslant 0$.

Das folgende Lemma zeigt, dass die im obigen Beispiel nicht erfüllte Voraussetzung $K \cap L^0_+ = \{0\}$ bereits reicht, um Abgeschlossenheit zu erreichen.

Lemma 31. *Gilt $K \cap L^0_+ = \{0\}$, so ist $K - L^0_+$ abgeschlossen in L^0.*

Beweis. Sei $W_n \in K - L^0_+$, so dass $W_n \to W$ in L^0 (also in Wahrscheinlichkeit). Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. annehmen, dass $W_n \to W$ f.s. Es gilt

$$W_n = \widetilde{H}_n \cdot \Delta X - U_n \overset{L.27}{=} \widetilde{\widetilde{H}}_n \Delta X + H_n^{\perp}\Delta X - U_n = H_n^{\perp}\Delta X - U_n =: H_n\Delta X - U_n,$$

da $\widetilde{\widetilde{H}}_n \Delta X = 0$.

Zunächst nehmen wir an, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s. Nach Lemma 26 gilt, dass $H_{\sigma_n} \to H$ P-f.s. für eine monoton wachsende Folge (σ_n). Ebenso ist:

$$0 \leqslant U_{\sigma_n} = H_{\sigma_n}\Delta X - W_{\sigma_n} \to H\Delta X - W =: U \qquad P-\text{f.s.}$$

mit $U \geqslant 0$, also $W \in K - L^0_+$.

Wir zeigen noch, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s. Definiere die normierte Handelsstrategie $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$ und setze $A = \{\omega \in \Omega \ : \ \liminf |H_n| = \infty\}$. Lemma 26 angewendet auf $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$ liefert eine Teilfolge (τ_n), so dass $\xi_{\tau_n} \to \xi$ P-f.s.. Nun gilt:

$$0 \leqslant \mathbb{1}_A \frac{U_{\tau_n}}{|H_n|} = \mathbb{1}_A \left(\frac{H_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \cdot \Delta X - \frac{W_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \right) \to \mathbb{1}_A \xi \Delta X \quad P-\text{f.s.},$$

da $\frac{W_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \to 0$. Nun ist $\mathbb{1}_A \xi \in L^0(\mathscr{F}_{t-1})$ und die Annahme $K \cap L^0_+ = \{0\}$ impliziert $\mathbb{1}_A \xi \Delta X = 0$.

Wir möchten schließen, dass hieraus $\mathbb{1}_A \xi = 0$ folgt und verwenden, wie bereits bemerkt, hierfür die Technik des Orthogonalkomplements.

Damit zeigen wir, dass $\mathbb{1}_A \xi \in N^{\perp}$, so dass $\xi = 0$ und damit $P(A) = 0$ folgt. (wegen $|\xi| = 1$).

Hierzu gehen wir wie folgt vor: Für $\eta \in N$ gilt, dass

$$\xi_{\tau_n} \cdot \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n = k\}} \frac{1}{|H_k|} H_k \cdot \eta = 0,$$

da $H_k \in N^{\perp}$ und somit $H_k \cdot \eta = 0$. Wir erhalten $\xi_{\tau_n} \in N^{\perp}$. Da $N^{\perp}$ abgeschlossen ist, folgt $\xi \in N^{\perp}$. $\square$

Beispiele

In diesem Kapitel werden einige wichtige Beispiele eingeführt, die die vorherigen Techniken illustrieren und zentral in der Anwendung sind.

Das Cox-Ross-Rubinstein Modell

Dieses wichtige Beispiel ist ein Binomialmodell mit mehreren Zeiperioden. Es ist überraschend, dass sich die zentralen Fragestellungen in der Finanzmathematik bereits an Bi- und Trinomialmodellen sehr gut illustrieren lassen. Ebenso kann über Verteilungskonvergenz etwa das Black-Scholes Modell als Grenzwert erreicht werden, und sich so auch gewisse Formeln erreichen. Man sollte allerdings auch im Hinterkopf haben, dass gewissen Regeln wie Freiheit von Arbitrage, Existenz von Hedging-Strategien, faire Bewertungsregeln, etc. nicht unbedingt unter Konvergenz erhalten bleiben. Das wird im Folgenden nicht weiter diskutiert.

Wir nehmen an, dass das Bankkonto der Gleichung

$$S_t^0 = (1+r)^t, \qquad t = 0, \dots, T$$

genügt mit der Bedingung $r > -1$. Somit ist S^0 deterministisch, als nicht zufällig.

Darüber hinaus sei $d = 1$, und wir schreiben kurz $S^1 = S$. Für den Aktienkurs S gelte, dass

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} \xi_i, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Hierbei sind $\xi_1, \dots, \xi_T$ Zufallsvariablen mit $\xi_i \in \{1+u,\ 1+d\}$ wobei wir $-1 \leq d \leq u$ fordern. Wir nehmen an, dass $P(\xi_i = 1+u) \in (0,1)$ für $i = 1, \dots, T$. Die zugehörige Filtration definieren wir durch

$$\mathscr{F}_t = \sigma(S_1, \dots, S_t), \qquad t = 0, \dots, T.$$

Satz 32. *Das CRR-Modell erfüllt (NA) genau dann, wenn $d < r < u$. Unter Q sind (ξ_t) i.i.d. mit $Q(\xi_t = 1+u) = \frac{r-d}{u-d}$ für $t = 1, \dots, T$.*

Beweis. Wir berechnen das äuquivalente Martingalmaß. Es wird sich herausstellen, dass es höchstens eines gibt. Die Martingal-Bedingung bedeutet, dass

$$E_Q\Big[\frac{S_t}{S_t^0}|\mathscr{F}_{t-1}\Big] = \frac{S_{t-1}}{S_{t-1}^0}, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Nun kann man die multiplikative Struktur hervorragend ausnutzen und sieht, dass dies äquivalent ist zu

$$E_Q\Big[\frac{\xi_t}{1+r}|\mathscr{F}_{t-1}\Big] = 1, \qquad t = 1,\dots,T.$$

Da ξ_t jeweils nur zwei Werte annehmen kann, erhalten wir die folgende hinreichende und notwendige Bedingung für NA:

$$\begin{aligned}
& Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+u}{1+r} + Q(\xi_t = 1+d|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+d}{1+r} = 1,\\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\frac{1+u}{1+r} + (1-Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1}))\frac{1+d}{1+r} = 1,\\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})\Big(\frac{1+u}{1+r} - \frac{1+d}{1+r}\Big) = 1 - \frac{1+d}{1+r},\\
\Leftrightarrow \quad & Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1}) = \frac{r-d}{u-d}.
\end{aligned}$$

Wir lesen zunächst ab, dass $Q(\xi_t = 1+u|\mathscr{F}_{t-1})(\omega)$ deterministisch ist, also nicht von ω abhängen kann. Obwohl dies unter P der Fall sein kann, sind damit unter Q die (ξ_i) unabhängig und darüber hinaus identisch verteilt. Außerdem muss, um Äquivalenz zu erreichen

$$\frac{r-d}{u-d} \in (0,1)$$

gelten, also $d < r < u$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann es kein äquivalentes Martingalmaß geben, also gibt es Arbitrage. □

Das Bachelier Modell

In der Dissertation "Théorie de la Speculation" stellte Louis Bachelier bereits 1900 ein Modell für Aktienkurse vor. Es orientiert sich an der Brownschen Bewegung (und lässt negative Werte für den Aktienkurs zu). S^0 modellieren wir wie im vorigen Kapitel, aber dieses Mal ist

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \qquad t = 0,\dots,T$$

wobei W eine (diskrete) Brownsche Bewegung ist, das heisst

$$W_t = \sum_{i=1}^t \xi_i,$$

mit (ξ_i) i.i.d. und standardnormalverteilt. Ist dieses Modell frei von Arbitrage ?

Das (diskrete) Black-Scholes Modell

Die bahnbrechene Arbeit Black & Scholes (1973) verwendet statt der Brownschen Bewegung eine geometrische Brownsche Bewegung.

Diese hat eine ähnliche multiplikative Struktur wie das CRR Modell, und garantiert positive Aktienkurse.

Wir nehmen an, dass

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} e^{\eta_i},$$

mit

$$\eta_i = \widetilde{\mu} + \sigma \Delta W_i = \widetilde{\mu} + \sigma \xi,$$

wobei eben $\Delta W_t = W_t - W_{t-1} = \xi_t$ ist und W die obige disrekte Brownsche Bewegung. Ist dieses Modell frei von Arbitrage ? Konstruieren Sie ein Martingalmaß !

Wenn man den Erwartungswert von S_t ausrechnet, erhält man $\exp(\widetilde{\mu}t + 1/2\sigma^2 T)$. Aus diesem Grund verwendet man oft die Parametrisierung

$$S_t = S_0 \exp\Big(\mu t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t\Big), \tag{33}$$

was wir im Folgenden als das (diskrete) *Black-Scholes Modell* bezeichnen werden.

Im diskreten Black-Scholes Modell gibt es viele äquivalente Martingalemaße, ganz im Gegensatz zum kontinuierlichen Black-Scholes Modell. Unter diesen muss man sich für das Pricing ein Maß aussuchen und wir wählen das Maß so, dass W_t auch unter Q normalverteilt ist, und zwar mit gleicher Varianz.

Dies ist motiviiert dadurch, dass man die Varianz sehr gut schätzen kann, und somit hier weniger Unsicherheit besteht.

Lemma 34. *Ist $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ unter P und ist $dQ = LdP$ gegeben durch die Dichte*

$$L = \alpha \cdot e^{\beta\xi + \gamma\xi^2},$$

mit

$$\alpha = \sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}, \quad \beta = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2},$$

so ist $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unter Q.

Beweis. Wir berechnen die Laplace-Transformierte von ξ unter Q. Zunächst ist die Laplace-Transformierte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung gegeben durch

$$\begin{aligned}
E_Q[e^{u\xi}] &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ux - \frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2 - 2x\mu - 2ux\sigma^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2 - 2xa + a^2 - a^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{\mu^2 - a^2}{2\sigma^2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{\mu^2 - \mu^2 - 2\mu u\sigma^2 - u^2\sigma^4}{2\sigma^2}} = e^{\mu u + \frac{u^2\sigma^2}{2}}
\end{aligned} \tag{35}$$

mit $a = \mu + u\sigma^2$. Nun berechnen wir die Dichte und machen den Ansatz $L = \alpha \cdot e^{\beta\xi + \gamma\xi^2}$

$$\begin{aligned}
E_Q[e^{u\xi}] = E_P[Le^{u\xi}] &= e^{\alpha} E_P[e^{u\xi + \beta\xi + \gamma\xi^2}] \\
&= e^{\alpha} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ux + \beta x + \gamma x^2 - \frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ux - \frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}} dx
\end{aligned}$$

durch die Wahl von

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} = \sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \\
\beta &= e^{-\frac{2x\mu}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x\mu}{\sigma^2}} \\
\gamma &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

Satz 36. *Nehmen wir an, dass $S^0 = e^{r\cdot}$. Dann ist das diskrete Black-Scholes Modell ist frei von Arbitrage, und es gibt ein äquivalentes Martingalmaß, so dass*

$$S_t = S_0 \exp\Big(rt - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t\Big),$$

wobei $W_t = \sum_{s=1}^t \xi_s$ mit $\xi_1, \xi_2, \dots$ iid und standardnormalverteilt unter Q.

Beweis. Wie im vorigen Lemma wählen wir einen geeigneten Maßwechsel. Wir starten direkt in der Parametrisierung von Gleichung (33). Dabei ist W^P (also W unter P) gegeben durch

$$W_t^P = \sum_{s=1}^t \eta_s$$

mit (η_s) iid und standardnormalvereilt unter P. Aus Gleichung (33) erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln \frac{S_t}{S_0} &= \mu t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t^P \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mu + \sigma \eta_s - \frac{\sigma^2 t}{2}.\end{aligned}$$

Als Maßwechsel suchen wir also die Transformation von η mit Erwartungswert 0 nach Erwartungswert ${}^{r-\mu}/_{\sigma}$. Dies gelingt nun direkt mit Lemma 34.

Wir überprüfen noch, Q auch ein Martingalmaß ist. Dazu betrachten wir

$$X_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_0 \exp\Big(- \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t^Q \Big),$$

für $t \geq 0$. X ist ein Martingal, da

$$\begin{aligned}E_Q[X_t | \mathscr{F}_{t-1}] &= X_{t-1} E_Q \Big[e^{-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma \xi_t} \Big] \\ &= X_{t-1} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}\end{aligned}$$

mit der Hilfe von Gleichung (35). □

Konvergenz gegen das Black-Scholes Modell

Wir betrachten die Zeitpunkte $0, \frac{T}{n}, \ldots, \frac{nT}{n}$ und ein *Numéraire* für welches

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r_n)^n = e^{rT} \tag{37}$$

gelte. Dies ist äquivalent dazu, dass $nr_n \longrightarrow rT$. Wir betten das Modell in das obige Gitter ein durch

$$S^n_{\frac{kT}{n}} = S_0 \prod_{i=1}^{k} (1 + \xi_i^n) \tag{38}$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots$ Dazu nehmen wir lediglich an, dass

$$-1 < \alpha_n \leqslant \xi_i^n \leqslant \beta_n. \tag{39}$$

mit $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$ und, um NA zu erhalten, dass

$$E[\xi_i^n] = r_n. \tag{40}$$

Außerdem gelte

$$\sigma_n^2 := \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\xi_i^n) \to \sigma^2 \in (0, \infty). \tag{41}$$

Für den Beweis verwenden wir folgende Version des zentralen Grenzwertsatzes.

Theorem 42 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** *Seien $Y_1^n, \dots, Y_n^n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, P_n)$, so dass $Y_1^n, \dots, Y_n^n$ unabhängig sind und (jeweils für $n \to \infty$)*

(i) $\sum_{k=1}^n E_n[Y_k^n] \to \mu$,

(ii) $\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}[Y_k^n] \to \sigma^2$,

(iii) *Es gibt eine Nullfolge $(\gamma_n) \to 0$, so dass $P_n(|Y_k^n| \leqslant \gamma_n) = 1$ für alle $n \geq 1$.*

Dann folgt, dass

$$\sum_{k=1}^n Y_k^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(\mu, \sigma^2).$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz erhalten wir dass die Logarithmen des Aktienkurses gegen eine Brownsche Bewegung konvergieren, der Aktienkurs also gegen eine geometrische Brownsche Bewegung.

Satz 43. *Unter (37) - (41) gilt*

$$S_T^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi\Big), \tag{44}$$

wobei $\xi \sim \mathscr{N}(0,1)$.

Beweis. Wir bezeichnen $Z^n := \log(\prod_{k=1}^n (1 + \xi_k^n))$. Aus der Taylorentwicklung erhalten wir, dass

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\rho(x),$$

wobei $\rho(x) \overset{x\to 0}{\to} 0$. Aus Annahme (39) erhalten wir, dass[11]

$$Z^n = \sum_{k=1}^n \left(\xi_k^n - \frac{1}{2}(\xi_k^n)^2\right) + \Delta_n$$

mit $|\Delta_n| \leqslant \delta(\alpha_n, \beta_n)\,\big(\sum_{k=1}^n (\xi_k^n)^2\big)$; hierbei ist $\delta(\alpha, \beta)$ eine Funktion so dass $\delta(\alpha, \beta) \to 0$ falls $\alpha, \beta \to 0$. Nun gilt

$$E[|\Delta_n|] \leqslant \delta(\alpha_n, \beta_n)\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\xi_k^n)}_{\to\sigma^2 T} + \sum_{k=1}^n (\underbrace{E[\xi_k^n]}_{=r_n})^2\Big) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

[11] Es gilt also, die Konvergenz von Z^n zu untersuchen.

Dieser Ausdruck konvergiert also in L^1, daher auch in Verteilung gegen Null. Wir können uns also auf die Betrachtung von $Y^n := \sum_{k=1}^n (\xi_k^n - \frac{1}{2}(\xi_k^n)^2)$ konzentrieren.

Wir verifizieren die Annahmen für den zentralen Grenzwertsatz: Dann ist

$$\begin{aligned} E[Y^n] &= \sum_{k=1}^n (r_n - \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(\xi_k^n) + (r_n)^2)) \\ &= nr_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(\xi_k^n) + nr_n^2 \overset{n\to\infty}{\to} rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \\ \mathrm{Var}[Y^n] &= \sum_{k=1}^n \Big(\mathrm{Var}(\xi_k^n) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}\left((\xi_k^n)^2\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{Cov}\left(\xi_k^n, (\xi_k^n)^2\right)\Big) \\ &\to \sigma^2 T, \end{aligned}$$

da für jedes $p > 2$

$$\sum_{k=1}^n E[(\xi_k^n)^p] \leqslant \gamma_n^{p-2} \sum_{k=1}^n E[(\xi_k^n)^2]$$

gilt wegen $|\xi_k^n| \leqslant \gamma_n = \max(|\alpha_n|, |\beta_n|)$ (und natürlich $\gamma_n \to 0$). Weiterhin ist:

$$|\xi_k^n - \frac{1}{2}(\xi_k^n)^2| \leqslant \gamma_n + \frac{1}{2}\gamma_n^2.$$

und die Behauptung folgt aus Theorem 3. □

Europäische Optionen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit europäischen Optionen (Call- und Put-Optionen). Da wir hier von einem verallgemeinerten Begriff einer Option ausgehen, nennt man diese manchmal auch (Europäische) bedingte Ansprüche.

Definition 45. Eine nicht-negative $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable C heißt *europäische Option*. Sie heißt *Derivat*, falls sie messbar ist bezüglich $\sigma(S_t^i,\ 0 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$.

Beispiel 46 (Europäischer Call und Put)**.** Die klassischen Beispiele sind der Europäische Call, das Recht eine Aktie S^k an T für den Preis K zu kaufen. Sie hat an T den Wert

$$(S_T^k - K)^+.$$

Das Verkaufsrecht heist Europäischer Put und hat analog den Wert $(K - S_T^k)^+$.

Beispiel 47 (Barrier-Optionen)**.** Eine *Barrier-Option* ist eine Option, deren Auszahlung davon abhängt, ob der Aktienkurs eine Barriere durchbrochen hat oder nicht:

- *Down-and-out*: $(S^k_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leqslant i \leqslant T} S^k_i > B\}}$,
- *Down-and-out*: $(S^k_T - K)^+ 1_{\{\min_{0 \leqslant i \leqslant T} S^k_i > B\}}$,

Wir setzen $H := \frac{C}{S^0_T}$ für die diskontierte Auszahlung der Europäischen Option C an T.

Definition 48. Die Europäische Option C heißt *replizierbar* oder *erreichbar*, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{H}$ gibt, so dass

$$C = \overline{H}_T \cdot \overline{S}_T, \quad P - \text{f.s.}$$

$\overline{H}$ heißt *Replikationsstrategie*.

Das ist äquivalent zur Replizierbarkeit in diskontierten Ausdrücken ! Wir erhalten folgende Aussage.

Satz 49. *Sei C erreichbar und $D = {}^{C}/_{S^0_T}$. Dann ist*

(i) $E_Q[D] < \infty$*, für alle* $Q \in \mathscr{M}_e$*,*

(ii) für jeden Wertprozess V einer Replikationsstrategie gilt:

$$V_t = E_Q[D \mid \mathscr{F}_t] \quad \forall\, Q \in \mathscr{M}_e.$$

Man beachte, dass links und rechts sehr unterschiedliche Ausdrücke stehen: die linke Seite hängt nicht von Q ab, die rechte Seite hängt nicht von der Replikationsstrategie H ab.

Beweis. Nach Satz 15 ist V ein Q-Martingal, also $V_0 < \infty$, und $V_0 = E_Q[D]$, somit folgt (i).

Für (ii) beobachte man, dass $E_Q[D \mid \mathscr{F}_t]$ nicht von H abhängt, aber

$$V_t = E_Q[V_T|\mathscr{F}_t] = E_Q[D|\mathscr{F}_t]$$

ist. □

Definition 50. Eine Zahl $\pi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *arbitragefreier Preis von C*, falls es einen adaptierten stochastischen Prozess X^{d+1} gibt mit

(i) $X_0^{d+1} = \pi$,

(ii) $X_t^{d+1} \geqslant 0$, $t = 0, \ldots, T$,

(iii) $X_T^{d+1} = C/S_T^0$ P-f.s..

und der Markt $(X^1, \ldots, X^{d+1})$ arbitragefrei ist.

Im Folgenden sprechen wir direkt von der europäischen Option D, konzentrieren uns also direkt auf die diskontierte Auszahlung D. Wir bezeichnen die *Menge der arbitragefreien Preise* mit $\pi(D)$ und setzen

$$\pi_{\inf}(D) := \inf \pi(D) \quad \textit{und} \quad \pi_{\sup}(D) := \sup \pi(D).$$

Man beachte, dass π und somit $\pi(D)$ in Einheiten des Numéraires formuliert wurde.

Satz 51. *Es gelte (NA) und wir betrachten eine Europäische Option mit diskontierter Auszahlung D. Dann ist* $\pi(D) \neq \varnothing$ *und* $\pi(D) = \{E_Q[D] : Q \in \mathscr{M}_e\}$. *Es folgt, dass*

$$\pi_{\inf}(D) = \inf_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[D] \quad \textit{und} \quad \pi_{\sup}(D) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[D].$$

Beweis. (Zweiter Teil der Aussage) $\pi_{\inf}(D) = \inf_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[D]$ ist klar.

Für $\pi_{\sup}(D)$ gehen wir wie folgt vor: **Ang.**: $Q^\infty \in \mathscr{M}_e$ und $E^\infty[D] = \infty$. Wir zeigen, dass für jedes $c > 0$ ein $\pi \in \pi(D)$ existiert, so dass $\pi > c$, also $\pi_{\sup}(D) = \infty = \sup_{Q \in \mathscr{M}_e} E_Q[D]$. Wir wählen ein n, so dass $\pi' = E^\infty[D \wedge n] > c$ und setzen:

$$X_t^{d+1} := E^\infty[D \wedge n \mid \mathscr{F}_t].$$

Dann ist Q^∞ EMM zu $(X^1, \ldots, X^{d+1})$. Dieser Markt erfüllt also (NA). Dann können wir Q^∞ als P verwenden und erhalten durch das FTAP ein $Q \sim Q^\infty$, $Q \in \mathscr{M}_e$, was wir so wählen können, dass $E_Q[D] < \infty$ (nach Lemma 20). Dann ist: $\pi = E_Q[D] \in \pi(D)$ und es gilt:

$$\pi = E_Q[D] \geqslant E_Q[D \wedge n] = E_Q[X_T^{d+1}] = x_0^{d+1} = E^\infty[D \wedge n] = \pi' > c.$$

□

Satz 52. *Sei H eine Europäische Option mit diskontierter Auszahlung D.*

(i) Ist H erreichbar, so ist $\pi(D) = \{V_0\}$ wobei V_0 der anfängliche Wert einer Replikationsstrategie ist.

(ii) Ist H nicht erreichbar, so ist $\pi(D) = (\pi_{\inf(D)}, \pi_{\sup(D)})$.

Beweis. i) folgt aus $V_t = E_Q[D \mid \mathscr{F}_t]$, was wir in Satz 49 gezeigt haben.

ii) Zunächst ist $\pi(D)$ konvex, also ein Intervall. Sei $Q \in \mathscr{M}_e$ und $\pi := E_Q[D] < \infty$. Ein solches Maß können wir nach Lemma 20 immer finden.

Wir setzen einen Kandidaten für den Preisprozess fest:

$$U_t := E_Q[D \mid \mathscr{F}_t] \quad t = 0, \dots, T,$$

so dass $D = U_0 + \sum_{t=1}^T U_t - U_{t-1}$. Da D nicht erreichbar ist, gibt es $t \in \{1, \dots, T\}$, so dass $(U_t - U_{t-1}) \notin K_t \cap L^1(Q)$ (nach Konstruktion ist $U_t \in L^1(Q)$) .

Der Satz von Hahn-Banach, Satz 23, mit $B = \{U_t - U_{t-1}\}$ und $C = K_t \cap L^1(Q)$ liefert $Z \in L^\infty(\Omega, \mathscr{F}_t, Q)$, so dass

$$\sup\{E_Q[ZW],\ W \in K_t \cap L^1(Q)\} < E_Q[Z(U_t - U_{t-1})] < \infty. \tag{53}$$

Wie in Lemma 21 aus dem vorherigen Abschnitt folgt aus der Linearität von $K_t \cap L^1(Q)$, zunächst, dass

$$E_Q[ZW] \leqslant 0 \quad \forall\, W \in K_t \cap L^1(Q)$$

und, durch erneute Verwendung der Linearität, dass $E_Q[ZW] = 0$ für alle $W \in K_t \cap L^1(Q)$. Aus (53) erhalten wir damit $E_Q[Z(U_t - U_{t-1})] > 0$.

O.B.d.A. sei $|Z| < \frac{1}{3}$ und definiere $Z' := 1 + Z - E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}] > 0$ und $dQ' := Z' dQ$. Dann ist $E_{Q'}[D] \leqslant \frac{5}{3} E_Q[D] < \infty$ und

$$\begin{aligned} E_{Q'}[D] &= E_Q\big[(1 + Z - E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}])D\big] \\ &= E_Q[D] + E_Q\big[Z E_Q[D \mid \mathscr{F}_t]\big] - E_Q\big[D E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}]\big] \\ &= E_Q[D] + E_Q\big[Z \cdot U_t\big] - E_Q\big[U_{t-1} E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}]\big] \\ &= E_Q[D] + E_Q\big[Z \cdot U_t\big] - E_Q\big[Z \cdot U_{t-1}\big] \\ &> E_Q[D]. \end{aligned}$$

Ist Q' nun ein Martingalmaß, so haben wir gezeigt, dass es zu $\pi \in \pi(D)$ immer auch ein $\pi' \in D$ mit $\pi' > \pi$ gibt, also muss $\pi(D)$ nach oben offen sein. Analog ist $\pi(D)$ auch nach unten offen und die Behauptung folgt.

Wir zeigen noch, dass $Q' \in \mathscr{M}_e$. Die Dichte Z' ist $\mathscr{F}_t$-messbar. Für $k-1 \geq t$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{Q'}[X_k - X_{k-1} \mid \mathscr{F}_{k-1}] &= E_Q[Z'(X_k - X_{k-1}) \mid \mathscr{F}_{k-1}] \\ &= Z' \cdot E_Q[X_k - X_{k-1} \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0, \end{aligned}$$

da Z' $\mathscr{F}_t$-messbar, also $\mathscr{F}_{k-1}$-messbar ist. Für $k = t$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &E_{Q'}[X_t - X_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}] \\ &\qquad = E_Q[X_t - X_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}] + E_Q[Z(X_t - X_{t-1}) \mid \mathscr{F}_{t-1}] \\ &\qquad - E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}]E_Q[X_t - X_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

Für $k < t$ ist

$$E_Q[(X_k - X_{k-1}) \cdot \Big(E_Q[1 + Z + E_Q[Z \mid \mathscr{F}_{t-1}] \mid \mathscr{F}_k]\Big) \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0.$$

$\square$

Am Markt werden oft andere Einschränkungen als die (NA) Einschränkungen verwendet, z.B. sogenannte Good-Deal Bounds oder Statistical Arbitrages. (Wir suchen z.B. nach einer Klasse von W-Maßen, die uns dabei helfen soll, profitabel zu handeln).

Vollständige Märkte

Definition 54. Ein arbitrage-freier Markt heißt *vollständig*, falls jeder bedingte Anspruch erreichbar ist.

Wir werden sehen, dass ein Markt mit $d = 1$ also zwei gehandelten Produkten vollständig ist - das ist genau das Binomial-Modell, was wir bereits ganz zu Beginn kennengelernt haben.

Satz 55. *Ein arbitrage-freier Finanzmarkt ist vollständig genau dann, wenn* $\mathscr{M}_e = \{Q\}$.

Beweis. Betrachten wir einen vollständigen Finanzmarkt. Ziel ist es zu zeigen, dass für zwei $Q, Q' \in \mathscr{M}_e$ gilt, dass $Q = Q'$. Dazu betrachten wir die Europäische Option $H = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{F}_T$. Dann gibt es nach Satz 49 oder Satz 52(i) einen eindeutigen (!) Preis an $t = 0$, so dass

$$V_0 = E_Q[\mathbb{1}_A] = E_{Q'}[\mathbb{1}_A].$$

Da $A \in \mathscr{F}_T$ beliebig war, gilt $Q = Q'$ (auf dem Messraum $(\Omega, \mathscr{F}_T)$).

Sei umgekehrt $\mathscr{M}_e = \{Q\}$, so ist $\pi(H) = \{E_Q[H]\}$, also H erreichbar nach Satz 52(ii). $\square$

Man kann Vollständigkeit auch wie folgt charakterisieren: Mit $\mathscr{M}$ bezeichnen wir die Menge aller Martingalmaße (ohne $Q \sim P$) und mit $\mathscr{M}_e$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Ein extremaler Punkt einer konvexen Menge ist ein solcher Punkt, der nicht als Konvexkombination von zwei anderen Punkten dargestellt werden kann.

Satz 56. *Für $Q \in \mathscr{M}_e$ sind äquivalent:*

(i) $\mathscr{M}_e = \{Q\}$,

(ii) *Q ist extremaler Punkt von $\mathscr{M}_e$,*

(iii) *Q ist extremaler Punkt von $\mathscr{M}$,*

(iv) *Jedes Q-Martingal ist von der Form* $M = M_0 + \sum_{t=1}^{\cdot} H_t(X_t - X_{t-1})$.

Sowohl $\mathscr{M}_e$ als auch $\mathscr{M}$ sind konvex. Extremale Punkte einer konvexen Punkte lassen sich nicht als nichttriviale Konvexkombination darstellen.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i)⇒(iii): Angenommen das äquivalente Martingalmaß Q lässt sich schreiben als

$$Q = \alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2$$

mit $Q_1, Q_2 \in \mathscr{M}$, und $\alpha \in (0,1)$. Ist $Q(F) = P(F) = 0$, so muss $Q_1(F) = Q_2(F) = 0$ sein, so dass $Q_1 \ll P$ und $Q_2 \ll P$.

Da $Q \sim P$ nach Voraussetzung können wir

$$Q_i' = \frac{1}{2}(Q_i + Q), \qquad i = 1, 2,$$

betrachten und dann folgt für $P(F) > 0$ auch dass $Q(F) > 0$ und somit $Q_i' > 0$, also ist $Q_i' \sim P$.

Dann ist aber Q_i' ein äquivalentes Martingalmaß, also nach (i) $Q_1' = Q_2' = Q$ und somit $Q_1 = Q_2 = Q$.

Die Implikation (iii)⇒(ii) ist klar.

Als nächstes zeigen wir (ii)⇒(i). Dazu nehmen wir an, es gebe $Q' \in \mathscr{M}_e$ mit $Q' \neq Q$. Wir zeigen gleich, dass wir $\frac{dQ'}{dQ}$ als beschränkt annehmen können, etwa durch die Konstante c. Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{c}$ ist mit

$$\frac{dQ''}{dQ} := 1 + \varepsilon - \varepsilon \frac{dQ'}{dQ}$$

$Q'' \in \mathscr{M}_e$ und

$$Q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} Q' + \frac{1}{\varepsilon} Q''$$

womit Q nicht extremal sein kann.

Für die Beschränktheit möchten wir das FTAP nutzen. Da $Q \neq Q'$, gibt es ein $A \in \mathscr{F}_T$, so dass $Q(A) \neq Q'(A)$. Wir fügen dem Markt das Wertpapier

$$X_t^{d+1} := Q'(A | \mathscr{F}_t), \qquad t = 0, \ldots, T$$

hinzu und betrachten Q als Referenzmaß. Dann ist Q' ein äquivalentes Martingalmaß für den erweiterten Markt, also gibt es nach dem Hauptsatz ein Q'' mit beschränkter Dichte $\frac{dQ''}{dQ}$. Außerdem ist $Q'' \neq Q$, da Q kein Martingalmaß für X^{d+1} ist.

Wir fahren fort mit (i)⇒(iv). Nun haben wir einen vollständigen Markt wodurch jeder bedingte Anspruch replizierbar ist. Damit kann man das zugehörige Q-Martingal durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie und damit wie in (iv) darstellen. Die einzige Schwierigkeit ist, dass Europäische Optionen in unserer Defintion stets ≥ 0 sind. Wir zerlegen geeignet $M_T = M_T^+ - M_T^-$. Dann sind M_T^+ und M_T^- Europäische Optionen, also replizierbar und wir finden die zugehörigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien, so dass

$$M_T^{\pm} = V_0^{\pm} + \sum_{t=1}^{T} H_t^{\pm} (X_t - X_{t-1})$$

mit konstanten $V_0^\pm$. Wir erhalten die gewünschte Darstellung durch Addition.

Schließlich zeigen wir (iv)⇒(i). Betrachten wir die Europäische Option $\mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathscr{F}_T$ mit zugehöriger Darstellung

$$M_t = E_Q[\mathbb{1}_A|\mathscr{F}_t].$$

Damit ist $\mathbb{1}_A$ erreichbar mit eindeutigem Preis $Q(A) = Q'(A)$ für $Q, Q' \in \mathscr{M}_e$ und wir erhalten (i). □

Als Übungsaufgabe zeigen man, dass ein vollständiger Finanzmarkt mit d Wertpapieren (1 Bankkonto und d Wertpapieren) höchstens $d+1$ Atome haben kann.

Wie bereits erläutert ist das Binomialmodell vollständig und es gibt ein eindeutiges Martingalmaß.

Black-Scholes-Formel

Als das bekannteste Beispiel für die Bewertung einer Europäischen Option ist die berühmte Formal von Fisher Black und Myron Scholes zur Bewertung eines Europäischen Calls zu sehen[12]. Ein Europäischer Call ist das Recht, die zugrundeliegende Aktie an dem zukünftigen Zeitpunkt T (Maturity, Maturität) zu dem vorab vereinbarten Preis K (Strike) zu kaufen.

[12] Blanka N Horvath. Golden jubilee for an iconic financial formula, 2023

Da es sich um ein Recht handelt, ist der Wert immer größer oder gleich null. Wir erhalten die Auszahlung an T

$$(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Durch die risikoneutrale Bewertungsformel können wir einen Preis bestimmen. Nehmen wir also an, wir befinden uns im Kontext von (44), es gilt also unter einem äquivalenten Martingalmaß Q, dass

$$S_T = S_0 \exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T\Big),$$

mit $W_T \sim \mathscr{N}(0,T)$. Dann ist der Preis des Europäischen Calls gegeben durch

$$\pi^{\text{Call}} = E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

Diesen Erwartungswert können wir ausrechnen und erhalten

$$\pi^{\text{Call}} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \qquad d_{1/2} = \frac{\log \frac{S_0}{Ke^{-rT}} \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{57}$$

Zur Berechnung gehen wir wie folgt vor: Wir definieren

$$\alpha := \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}, \quad \mu := \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \quad \widetilde{\sigma} := \sigma\sqrt{T},$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
E_Q[e^{-rT}(S_T-K)^+] &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^x - K\right)^+ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx \\
&= \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} e^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_1} \; - K \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_2} .
\end{aligned}
$$

Wir berechnen im Folgenden das Integral I_1. Durch eine quadratische Ergänzung stellt man den Integranden als Produkt einer Normalverteilungsdichte und eines variablenfreien Korrekturterms dar. Der Integrand von I_1 hat die Form $\exp(\lambda(x))$ mit

$$
\begin{aligned}
\lambda(x) &= x - \frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2} = -\frac{-2\widetilde{\sigma}^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\widetilde{\sigma}^2} \\
&= -\frac{\left(x-(\mu+\widetilde{\sigma}^2)\right)^2 + \left(\mu^2 - (\mu+\widetilde{\sigma}^2)^2\right)}{2\widetilde{\sigma}^2} \\
&= -\frac{\left(x - (\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T)\right)^2}{2\sigma^2 T} + (\ln S_0 + rT),
\end{aligned}
$$

wobei man die letzte Gleichheit durch einsetzen von $\mu + \widetilde{\sigma}^2 = \ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T$ und $\frac{(\mu+\widetilde{\sigma}^2)^2-\mu^2}{2\widetilde{\sigma}^2} = \mu + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2} = \ln S_0 + rT$ erhält. Unter Beachtung von $\alpha e^{\ln S_0 + rT} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} S_0$ folgt

$$
I_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - (\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T)\right)^2}{2\sigma^2 T}\right) dx. \qquad (58)
$$

Betrachten wir $\widetilde{Z} \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + (r+\frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\right)$, dann ist $\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Gleichung (58) lässt sich schreiben als

$$
\begin{aligned}
I_1 &= S_0\, Q(\widetilde{Z} > \ln K) \\
&= S_0\, Q\left(\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln K - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S_0\, Q\left(\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > -d_1\right) \\
&= S_0\left(1 - \Phi(-d_1)\right) = S_0 \Phi(d_1),
\end{aligned}
$$

wobei man die Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung ausnutzt. Die Berechnung von Integral I_2 geht analog, hier kann sogar auf die quadratische Ergänzung verzichtet werden.

Amerikanische Optionen

Amerikanische Optionen erlauben es dem Käufer an jedem beliebigen Zeitpunkt bis zur Maturität der Option diese auszuüben und sind deswegen deutlich komplexer. Wir werden diesen Abschnitt nutzen um einen kurzen Einblick in die einfachste Form der stochastischen Kontrolle, des optimalen Stoppens, zu gewinnen.

Verkäufer-Sicht

Wir betrachten nun stets einen diskreten Zeithorizont, also die Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ Dazu arbeiten wir auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}_T, (\mathscr{F}_t)_{t=0,\ldots,T}, P)$.

Zunächst wiederholen wir einige Konzepte in diskreter Zeit.

Satz 59. *Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ *und* Y *ein adaptierter Prozess, so dass* $E_Q[|Y_t|] < \infty$, $t = 0, \ldots, T$. *Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$Y = M - A \qquad \text{(Doob-Zerlegung)}$$

mit einem $\mathbb{Q}$*-Martingal* M *und einem vorhersehbaren Prozess* A *mit* $A_0 = 0$.

Beweis. Wir setzen

$$A_t - A_{t-1} := -E_Q[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}], \quad t = 1, \ldots, T$$

Dann ist A vorhersehbar und M, definiert durch $Y_t + A_t =: M_t$ ist Martingal:

$$\begin{aligned} E_Q[M_t \mid \mathscr{F}_{t-1}] &= Y_{t-1} + A_{t-1} \\ &\quad + E_Q[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}] - E[Y_t - Y_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

□

Definition 60. Eine *amerikanische Option* ist ein nicht-negativer adaptierter Prozess $C = (C_t)_{t=0,\ldots,T}$.

Hier interpretieren wir C_t als die Auszahlung zum Zeitpunkt t, falls wir ausüben.

Beispiel 61 (Europäische Optionen)**.** Eine europäische Option auf die Aktie S mit Ausübungszeitpunkt T ist auch eine amerikanische

Option (im Sinne unserer Definition):

$$C_T = (S_T - K)^+ \quad \text{und} \quad C_t = 0, \quad t = 0, \ldots, T-1$$

Ein amerikanischer Call zahlt

$$C_t = (S_t - K)^+, \quad t = 0, \ldots, T$$

und ein amerikanischer Put

$$P_t = (K - S_t)^+, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass $P \leq K$ ist, also beschränkt.

Beispiel 62 (Bermuda Option)**.** Eine **Bermuda Option** erlaubt die Ausübung nur an einer Teilmenge $\mathscr{T} \subseteq \{0, \ldots, T\}$ von Zeitpunkten.

Definition 63. Eine Ausübungsstrategie für die amerikanische Option C ist eine $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable τ mit Werten in $\{0, \ldots, T\}$. Die Auszahlung ist

$$C_\tau(\omega) := C_{\tau(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Hierbei nehmen wir die Sicht des Verkäufers ein: Wir wissen nicht, auf welche Informationen der Käufer zugreifen kann und somit ist die Ausübungsstrategie aus Sicht des Verkäufers eine *beliebige* zufällige Zeit (und das ist genau die Definition).

Wir betrachten einen d-dimensionalen Aktienmarkt, also sei $S = (S^0, \ldots, S^d)$ ein $d+1$-dimensionaler adaptierter Prozess mit

$$\begin{aligned} &S_t^0 > 0 \\ &S_t^i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, d; t = 0, \ldots, T \end{aligned}$$

Wir definieren

$$D_t := \frac{C_t}{S_t^0}, \quad t = 0, \ldots, T$$

als Prozess der diskontierten Auszahlungen. Wir nehmen an, dass

$$\mathscr{M}_e = \{Q\}, \tag{A1}$$

es also lediglich ein äquivalentes Maß Q gibt (Vollständigkeit).

Welche Anforderungen an eine Absicherungsstrategie U möchten wir stellen? Zunächst fordern wir $U_t \geq D_t$, denn der Käufer kann jederzeit ausüben und der Verkäufer muss stets genügend Kapital zur Deckung vorrätig haben. Außerdem fordern wir, dass $U_T = D_T$ (und nicht etwa $U_T \geq D_T$); der Preis soll keinesfalls zu hoch sein. Durch die zweite Bedingung und die Annahme (A1) bietet sich die Möglichkeit zur Replikation: An $T-1$ fordern wir

(i) $U_{T-1} \geq D_{T-1}$

(ii) $U_{T_1} \geq E_Q[U_T \mid \mathscr{F}_{T-1}]$ $\Leftarrow$ damit können wir $U_T = D_T$ sicher erreichen.

Wir erhalten folgende Rekursion:

Definition 64. Der Prozess U gegeben durch

$$U_T = D_T$$
$$U_t = \max\{D_t, E_Q[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]\}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

heißt **Snellsche Einhüllende** von H.

Beispiel 65 (Europäische Option und ihre Snellsche Einhüllende)**.** Sei H eine europäische Option, so dass $D_t = 0$, für $t = 0, \dots, T-1$. Dann ist die Snellsche Einhüllende gerade

$$U_t = E_Q[D_T \mid \mathscr{F}_t] = E_Q\Big[\frac{C_T}{S_T^0} \mid \mathscr{F}_t\Big],$$

so dass wir durch $C_t/S_t^0 = U_t$ die übliche Replikationsstrategie erhalten.

Natürlich kann man die Snellsche Einhüllende für jedes Maß P' mit

$$E_{P'}[|D_t|] < \infty, \quad t = 0, \dots, T \tag{A2}$$

definieren.

Satz 66. *Sei P' ein Maß, so dass (A2) gilt. Dann ist die Snellsche Einhüllende $U = U^{P'}$ von H das kleinste P'-Supermartingal, welches H dominiert.*

Beweis. Wir müssen also zeigen: Ist U' Supermartingal mit $U_t' \geq D_t$, $t = 0, \dots, T$, so folgt $U' \geq U$. Zunächst gilt für U, dass

$$U_{t-1} \geq E_{P'}[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}],$$

so dass U ein Supermartingal ist. Für U' erhalten wir

$$U_T' \geq D_T = U_T.$$

Nun verwenden wir eine Induktion: Gilt $U_t' \geq U_t$ so erhalten wir

$$U_{t-1}' \geq E_Q[U_t' \mid \mathscr{F}_{t-1}] \geq E_Q[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}].$$

Außerdem gilt auch $U'_{t-1} \geq D_{t-1}$, so dass

$$U'_{t-1} \geq \max\{D_{t-1}, E_Q[U_t \mid \mathscr{F}_{t-1}]\} = U_{t-1}$$

folgt. □

Mit der Doob-Meyer-Zerlegung schaffen wir es zu einer Super-Replikationsstrategie

$$U_t = M_t - A_t, \quad t = 0, \dots, T.$$

Hierbei ist M ein Q-Martingal, also

$$M_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} H_k \Delta X_k \quad \text{mit } X_k^i = \frac{S_k^i}{S_k^0}$$

nach dem Martingaldarstellungssatz. Somit gilt

$$M_t \geq U_t \geq D_t.$$

Mit einer zusätzlichen Komponente H^0 können wir ξ zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie erweitern, so dass $V_t^H \geq D_t$ für alle $t \geq 0$.

Theorem 67. *Unter (A1) existiert ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess H, so dass*

$$U_t = \sum_{k=1}^{t} H_k \Delta X_k \geq D_t \quad \textit{für alle } 1 \leq t \leq T. \tag{68}$$

Hierbei ist U minimal.

Beweis. Die Snellsche Einhüllende erfüllt (68) wie gerade erläutert. Es bleibt die Minimalität zu zeigen. Sei also $\widetilde{U}$, $\widetilde{H}$ so dass

$$\widetilde{V}_t := \sum_{k=t}^{t} \widetilde{H}_g \Delta X_k \geq D_t \quad \forall t.$$

Wir zeigen $\widetilde{V} \geq V$ mit (Rückwärts-)Induktion. Zunächst ist $\widetilde{V}_T \geq D_T = U_T$. Angenommen $\widetilde{V}_{t+1} \geq U_{t+1}$. Dann ist

$$E_Q[\widetilde{V}_{t+1} - \widetilde{V}_t \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[\widetilde{H}_{t+1} \Delta X_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Somit folgt

$$\widetilde{V}_t = E_Q[V_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] \geq D_t \vee E_Q[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] = U_t.$$

□

Käufer-Sicht

Nun betrachten wir die amerikanische Option aus Käufer-Sicht. Der Käufer hat die Filtration $\mathbb{F}$ zur Verfügung und sucht eine optimale Strategie gegeben dieser Information.

Definition 69. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\} \cup \{+\infty\}$ heißt **Stoppzeit**, falls $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ für $t = 0, \dots, T$.

- Die konstante Zeit $\tau \equiv t$ ist eine Stoppzeit für alle $t \in \{0, \dots, T\} \cup \{\infty\}$.
- τ ist Stoppzeit genau dann, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für $t = 0, \dots, T$.
- Außerdem sind $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $(\tau + \sigma) \wedge T$ wieder Stoppzeiten.

Beispiel 70 (Ersteintrittszeit)**.** Ein typisches Beispiel einer Stoppzeit ist

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq c\}$$

mit der Konvention $\inf \varnothing = \infty$. Wir erhalten

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s=0}^{t} \{X_s \geq c\} \in \mathscr{F}_t,$$

also ist τ in der Tat eine Stoppzeit.

Für eine Stoppzeit τ und einen stochastischen Prozess X definieren wir den an τ gestoppten Prozess X^τ durch

$$X_t^\tau := X - t \wedge \tau \quad t = 0, \dots, T.$$

Für das folgende Resultat nehmen wir $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, T\}$ an.

Theorem 71 (Doobs optional sampling theorem)**.** *Sei M adaptiert, so dass $M_t \in L^1(Q)$, $f = 0, \dots, T$. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist Q-Martingal*

(ii) *Für alle Stoppzeiten τ ist M^τ Q-Martingal*

(iii) *$E_Q[M_{t\wedge\tau}] = M_0$ für alle Stoppzeiten τ.*

$(i) \Rightarrow (ii)$ Wir berechnen die Martingaleigenschaft von M^τ:

Beweis.
$$\begin{aligned} E_Q[M_{t+1}^\tau - M_t^\tau \mid \mathscr{F}_t] &= E_Q[(M_{t+1} - M_t)\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathscr{F}_t] \\ &= M_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} - M_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = 0. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ klar

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} & E_Q[M_t \mid \mathscr{F}_{t-1}] = M_{t-1}, \\ \iff \quad & E_Q[M_t \mathbb{1}_F] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F] \quad \forall F \in \mathscr{F}_{t-1} \end{aligned}$$

Wir definieren $\tau = \begin{cases} t & \omega \in F \\ t-1 & \omega \notin F \end{cases}$

Dann ist

$$E_Q[M_{T\wedge\tau}] = E_Q[M_t \mathbb{1}_F + M_{t-1}\mathbb{1}_{F^c}] = M_0$$

und

$$E_Q[M_{t-1}] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F + M_{t-1}\mathbb{1}_{F^c}] = M_0$$

Hieraus erhalten wir direkt, dass

$$E_Q[M_t \mathbb{1}_F] = E_Q[M_{t-1}\mathbb{1}_F]$$

□

Wir erhalten analog: M ist ein Q-Super-/Submartingal $\Leftrightarrow$ M^τ ist Q Super-/Submartingal für alle Stoppzeiten τ.

Der Käufer sucht eine optimale Strategie. Da er nur $(\mathscr{F}_t)$ zur Verfügung hat, sind die möglichen Strategien (Stoppzeiten) gegeben durch

$$\mathscr{T} := \{\tau : \tau \text{ ist Stoppzeit und } \tau \leq T\}.$$

Das Ziel:

$$\text{Maximiere } E_P[D_\tau], \quad \tau \in \mathscr{T}. \tag{72}$$

Dies nennt man ein **optimales Stopp-Problem**.

Die Analyse dieses Problems benötigt keine Voraussetzungen (wie etwa NA), wir lassen $H \geq 0$ gelten und nehmen lediglich an, dass

$$D_t \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, P) \quad t = 0, \ldots, T \tag{73}$$

Beispiel 74 (Expected Utility Maximization)**.** Oft wird in den Anwendungen nicht D_t sondern

$$E_P[u(D_\tau)]$$

maximiert, mit einer **Nutzenfunktion** u (etwa x^k, $\log x$).

Wir konstruieren die Snellsche Einhüllende $U = U^P$ von H:

$$U_T = D_T$$
$$U_t = \max\{D_t, E[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]\} \quad t = 0, \dots, T-1$$

und definieren

$$\tau_{\min} := \min\{s \geq 0 : \; U_s = D_s\}$$
$$\tau_{\min}(t) := \min\{s \geq t : \; U_s = D_s\} \text{ und } \mathscr{T}_t := \{\tau \in \mathscr{T} : \tau \geq t\}$$

(dann ist $\tau_{\min} \leq T$).

Ist zB. $\Omega = [0,1]$ mit dem Lesbesgue-Maß, und $\Phi = \{\mathbb{1}_x : x \in [0,1]\}$, so ist $\varphi = 0$ P-f.s., aber $\sup_{\varphi \in \Phi} \varphi = 1$. Es benötigt also ein Konzept für ein Supremum was für Zufallsvariablen geeignet ist.

Satz 75. *Sei Φ eine beliebige Menge von reellwertigen Zufallsvariablen. Dann gibt es eine Zufallsvariable φ^*, so dass*

(i) $\varphi^* \geq \varphi$ *P-f.s. für alle $\varphi \in \Phi$,*

(ii) $\varphi^* \leq \psi$ *für jede Zufallsvariable ψ mit $\psi \geq \varphi$ P-f.s. für alle $\varphi \in \Phi$.*

Diese Zufallsvariable φ^* nennen wir das **essentielle Supremum** und schreiben

$$\varphi^* := \operatorname{ess\,sup} \Phi = \operatorname*{ess\,sup}_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass alle $\varphi \in \Phi$ Werte in $[0,1]$ annehmen – ansonsten betrachten wir $f(\varphi)$ mit einer streng monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Ist die Teilmenge $\Psi \subset \Phi$ abzählbar, so ist $\varphi_\Psi := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi$ messbar. Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen $\varphi \in \Phi$ werden von φ^* maximiert. Aus diesem Grund betrachten wir

$$c := \sup\{E[\varphi_\Psi] : \Psi \subset \Phi \text{ und } \Psi \text{ ist abzählbar }\}.$$

Wir wählen eine Folge Ψ_n, so dass $E[\varphi_{\Psi_n}] \to c$ und setzen $\Psi^* := \cup \Psi_n$. Dann ist Ψ^* wieder abzählbar und $E[\varphi_{\Psi^*}] = c$.

Wir zeigen, dass $\varphi^* := \varphi_{\Psi^*}$ die beiden Bedingungen erfüllt: Angenommen, (i) gelte nicht. Dann gibt es ein $\varphi \in \Phi$, so dass $P(\varphi > \varphi^*) > 0$ ist. Dann wäre aber

$$E[\varphi_{\Psi^* \cup \varphi}] > c,$$

ein Widerspruch.

Ist $\psi \geq \phi$ für all $\varphi \in \Phi$, so auch für alle $\varphi \in \Psi^* \subset \Phi$, so dass auch (ii) gilt. □

Wir sehen aus diesem Beweis auch, dass man eine Approximation finden kann, so lange Φ folgende Eigenschaft erfüllt: für $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ gibt es ein $\psi \in \Phi$, so dass $\psi \geq \max\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Dann finden wir (φ_n), so dass $\varphi_n \to \operatorname{ess\,sup} \Phi$.

Theorem 76. *Sei U die Snellsche Einhüllende von D. Dann gilt, dass für alle $0 \leq t \leq T$,*

$$U_t = E[D_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathscr{T}_t} E[D_\tau \mid \mathscr{F}_t]$$

Beweis. Zunächst ist U ein Supermartingal, so dass

$$U_t \geq E[U_\tau \mid \mathscr{F}_t] \geq E[D_\tau \mid \mathscr{F}_t],$$

für alle $\tau \in \mathscr{T}_t$. Dann folgt

$$U_t \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathscr{T}_t} E[D_\tau \mid \mathscr{F}_t].$$

Wir zeigen, dass

$$U_t = E[U_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] = E[D_{\tau_{\min}}(t) \mid \mathscr{F}_t] :$$

Die zentrale Beobachtung ist, dass

$$\begin{aligned} \text{auf } \{\tau_{\min}(t) > s\} \quad &\text{gilt} \quad U_{\tau_{\min}(t) \wedge s} = U_s > D_s \\ \{\tau_{\min}(t) \leq s\} \quad &\text{gilt} \quad U_{\tau_{\min}(t) \wedge s+1} = U_{\tau_{\min}(t) \wedge s} = U_{\tau_{\min}(t)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ auf $\{\tau_{\min}(t) > s\}$ ist

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\min}(t) \wedge s} = U_s \quad &= \quad D_s \vee E[U_{s+1} \mid \mathscr{F}_s] \\ &\overset{U_s \geq D_s}{=} E[U_{s+1} \mid \mathscr{F}_s] = E[U_{\tau_{\min}(t) \wedge s+1} \mid \mathscr{F}_s] \end{aligned}$$

auf $\{\tau_{\min}(t) \leq s\}$ ist

$$U_{\tau_{\min}(t) \wedge s} = U_{\tau_{\min}(t) \wedge s+1} = E[U_{\tau_{\min}(t) \wedge s+1} \mid \mathscr{F}_s],$$

also ist $(U_{tau_{\min}(t) \wedge s})_s$ ein Martingal! Somit gilt

$$U_t = U_{\tau_{\min}(t) \wedge t} = E[U_{\tau_{\min}(t) \wedge T} \mid \mathscr{F}_t] = E[U_{\tau_{\min}(t)} \mid \mathscr{F}_t]. \square$$

Definition 77. Wir nennen eine Stoppzeit $\tau^* \in \mathscr{T}$ **optimal**, falls

$$E[D_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathscr{T}} E[D_\tau].$$

Satz 78. *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathscr{T}$ ist optimal genau dann, wenn*

(i) $U_\tau = D_\tau$

(ii) U^τ *ist ein Martingal.*

Dies heißt automatisch, dass $\tau^* \geq \tau_{\min}$!

Beweis. Nach Theorem 76 ist

$$\sup_{\tau \in \mathscr{T}} E[D_\tau] = U_0. \tag{79}$$

Gilt also (i) und (ii), so folgt

$$U_0 = E[U_T^\tau] = E[U_\tau] = E[D_\tau] \overset{(79)}{=} \sup_{\tau \in \mathscr{T}} E[D_\tau],$$

also ist τ optimal.

Ist umgekehrt τ optimal, so folgt

$$U_0 = E[D_\tau] \leq E[U_\tau]. \tag{80}$$

Allerdings ist U^τ ein Supermartingal. $E[U_{\tau \wedge T}] = E[U_\tau] \leq E[U_{\tau \wedge 0}] = U_0$ und wir erhalten Gleichheit in (80). Da $D_t \leq U_t$ gilt, folgt $D_\tau = U_\tau$ f.s., also (i).

Weiterhin gilt für das Supermartingal U^τ, dass

$$U_0 = E[U_T^\tau] = E[U_0^\tau],$$

also muss U^τ sogar ein Martingal sein. □

Wir definieren

$$\tau_{\max} = \inf\{t \geq 0 : E[U_{t+1} - U_t \mid \mathscr{F}_t] \neq 0\} \wedge T.$$

Satz 81. *Eine Stoppzeit ist optimal genau dann, wenn*

(i) $\tau \leq \tau_{\max}$

(ii) $U_\tau = D_\tau$

Beweis. Sei $U = M - A$ die Doob-Zerlegung von U. Dann ist (ÜA) $U^\tau = M^\tau - A^\tau$ die Doob-Zerlegung von U^τ. U^τ ist genau dann ein Martingal, wenn $A_\tau = 0$ ist (A wachsend).

Nun ist

$$E[U_{t+1} - U_t \mid \mathscr{F}_t] \neq 0 \Leftrightarrow A_{t+1} \neq 0,$$

also ist U^τ genau dann ein Martingal, wenn $\tau \leq \tau_{\max}$.

Wir zeigen noch, dass $\tau_{\max}$ optimal ist: ($U_{\tau_{\max}} = D_{\tau_{\max}}$). Das ist klar für $\tau_{\max} = T$. Auf $\{\tau_{\max} = t\}$, $t < T$ gilt

$$A_t = 0, \quad A_{t+1} > 0,$$

also $U_t > E[U_{t+1} \mid \mathscr{F}_t]$, woraus $U_t = D_t$ folgt. □

Wir betrachten im Folgenden wieder den vollständigen Finanzmarkt,

$$M_t = \{Q\}.$$

Satz 82. *Sei U die Q-Snellsche Einhüllende der amerikanischen Option H mit Doob-Zerlegung*

$$U = M - A.$$

Dann ist

$$D_\tau \leq M_\tau$$

und Gleichheit gilt genau dann, falls τ Q-optimal ist.

Nach der Martingaldarstellung in vollständigen Märkten ist

$$M_t = U_0 + \sum_{k=1}^{t} H_k \Delta X_k$$

mit einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H.

Beweis. Für jede zufällige Zeit τ ist

$$D_\tau \leq U_\tau = M_\tau - A_\tau \leq M_\tau.$$

Nun ist $M_\tau = D_\tau$ äquivalent zu $D_\tau = U_\tau$ und $A_\tau = 0$. Das ist äquivalent zu $D_\tau = U_\tau$ und U^τ Martingal, was nach Satz 78 äquivalent ist zu τ Q-optimal. □

Wir möchten im Folgenden den amerikanischen Anspruch mit

$$V_t = E_P[D_T \mid \mathscr{F}_t]$$

vergleichen. Eine amerikanische Option sollte teurer sein als die Europäische:

Satz 83. *Es gilt $U^Q \geq V$. Ist $V \geq H$, so gilt $U^Q = V$.*

Beweis. Aus der Supermartingaleigenschaft von U^Q folgt sofort

$$U_t^Q \geq E_Q[U_T^Q \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[D_T \mid \mathscr{F}_t] \geq V_t.$$

Gilt $V \geq H$, so folgt nach Satz 66 $V \geq U^Q$ (U^Q ist das kleinste Supermartingal, das H dominiert), also $V = U$. □

Beispiel 84 (Amerikanischer Call)**.** Für $C_T = (S_T - K)_t$ erhalten wir

$$D_t = \Big(X_t - \frac{K}{S_t^0}\Big)_t.$$

Sei S^0 vorhersehbar und wachsend (Bank account), so folgt ($x \mapsto |x|_+$ konvex)

$$\begin{aligned} E_Q[D_{t+1} \mid \mathscr{F}_t] &\geq \Big(E_Q\Big[X_{t+1} - \frac{K}{S_{t+1}} \mid \mathscr{F}_t\Big]\Big)_+ \\ &\geq \Big(X_t - \frac{K}{S_t}\Big)_+ = D_t, \end{aligned}$$

so dass D ein Submartingal ist. In diesem Fall ist $D = V$, und $U_0 = V_0 \Rightarrow$ der Preis des amerikanischen Calls ist gleich dem Preis des europäischen Calls.

Risikomaße

Ein Risiko ist ein unvorhergesehenes Ereignis mit negativen Auswirkungen – so kann man es allgemein fassen. Der Vorteil der finanzmathematischen Behandlung von Risiko, ist dass man es einfach quantifizieren kann: Das Risiko hat direkte monetäre Auswirkungen auf unser Portfolio. Insofern sind Risiken, die wir betrachten mögliche zukünftige Verluste.

Je größer die Verluste, umso schlechter - so viel ist klar. Aber wie nun mit den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten umgehen? Hierfür hat sich der Begriff eines Risikomaßes als essentiell etabliert. Im Gegensatz zu dem Erwartungswert wird es typischerweise nichtlinear sein, was ein interessantes Kapitel von neuen Methoden eröffnet.

Einer finanziellen Position X können wir mit Hilfe einer Nutzenfunktion U das folgende Verlustfunktional zuordnen:

$$L(X) = -U(X).$$

Ein erstes, interessantes Maß wäre zum Beispiel der erwartete Verlust

$$E_P[L(X)]$$

unter einem Maß P. Vielleicht kennt man dieses P gar nicht und man ist an dem worst-case Verlust

$$\sup_{P \in \mathscr{P}} E_P[L(X)]$$

interessiert - ein weiteres nichtlineares Maß.

Wir werden zunächst eine wichtige Axiomatik für Risikomaße einführen.

Axiome für Risikomaße

Wir betrachten allgemein eine Menge Ω von Szenarien. Da wir zunächst keine Wahrscheinlichkeiten brauchen, muss dies nicht unbedingt ein Wahrscheinlichkeitsraum sein. Eine finanzielle Position ist dann schlicht eine Abbildung

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

in diskontierten Größen (oft auch als P&L bezeichnet). Wir sind an einer gegebenen Klasse $\mathscr{X}$ von Finanzpositionen interessiert und nehmen lediglich an, dass $\mathscr{X}$ ein linearer Raum beschränkter Funktionen ist, der alle Konstanten beinhaltet.

Definition 85. Eine Abbildung $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heisst **monetäres Risikomaß**, falls für alle $X, Y \in \mathscr{X}$ gilt:

(i) *Monotonie*: Ist $X \leq Y$, so ist $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

(ii) *Translationsinvarianz*: Für jedes $m \in \mathbb{R}$ ist $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.

Ein Risikomaß ist also monoton im strikten Sinn: Gibt es eine Position X, die in jedem (!) Szenario schlechter ist als Y, also

$$X(\omega) \leq Y(\omega) \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

so ist dieser Position ein höheres Risiko zuzuweisen, also $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Die zweite Bedingung, auch Cash Invarianz gennant ist die wichtigste Eigenschaft für die Praxis: Man kann das Risiko durch Hinzufügen eines Geldbetrages reduzieren. Hieraus leitet sich die Bedeutung als regulatorisches Kapital ab. Fügt man den Betrag m der Position hinzu, so reduziert sich das Risiko um m. Das Risikomaß operiert demnach auf einer *monetären* Skala. Das muss natürlich in anderen Kontexten nicht so sein, etwa wenn es um Menschenleben oder andere Aspekte (wie z.B. Fairness) geht.

Wir erhalten unmittelbar

$$\rho\big(X + \rho(X)\big) = 0,$$

der Wert $\rho(X)$ selbst genügt also als regulatorisches Kapital, um das Risiko auf 0 zu reduzieren. Außerdem ist für alle $m \in \mathbb{R}$

$$\rho(m) = \rho(0) - m.$$

Oft führt man eine Normalisierung ein und nimmt an, dass

$$\rho(0) = 0 \tag{86}$$

Lemma 87. *Ein monetäres Risikomaß ρ ist Lipschitz-stetig bezüglich der Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty$:*

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \| X - Y \|_\infty .$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$X \leq Y + \| X - Y \|_\infty$$

durch Monotonie und Translationsinvarianz: In der Tat,

$$\rho(X) \leq \rho(Y) - \| X - Y \|_\infty$$

und die Behauptung folgt. □

Es werden noch weitere Eigenschaften für uns interessant sein. Am berühmtesten ist die Klassifizierung von Risikomaßen als kohärent, was auf ein der meist-zitierten Arbeiten in der Finanzmathematik zurückgeht: [13]

[13] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999

Definition 88. Ein monetäres Risikomaß ρ heißt

(i) *konvex*, falls $\rho\big(\lambda X + (1-\lambda)Y\big) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(X)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$;

(ii) *positiv homogen*: für jedes $\lambda \geq 0$ ist $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$,

(iii) *sub-additiv*: falls $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Ein positiv homogenes und sub-additives Risikomaß heißt *kohärent*. Das ist äquivalent dazu, dass das Risikomaß positiv homogen und konvex ist.

Die ökonomische Intuition für Sub-Additivität ist Diversifizierung: Eine diversifizierte Position sollte ein geringeres Risiko haben als die einzelnen, getrennten Positionen. Außerdem verhindert es, dass durch Zerlegung in kleinere Einheiten ein Risiko künstlich verkleinert werden kann.

Positive Homogenität wird oft kritisiert, da sie das Anwachsen des Risikos linearisiert - in der Praxis wird dies nicht für beliebig große λ gelten, so dass die Konzentration auf konvexe Risikomaße sinnvoll ist. Das hängt aber sicher auch von der Situation ab - welche Risiken tauchen typischerweise auf, etc.

Beispiel 89 (Worst-Case Risikomaß)**.** Als erstes Beispiel bietet sich das Maß

$$\rho_{\max}(X) = -\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)$$

an. Dies ist ein kohärentes Risikomaß, wie man leicht überprüft. Außerdem dominiert es alle anderen, normierten monetären Risikomaße, da

$$\rho(X) \leq \rho\big(\inf X(\omega)\big) = \rho_{\max}(X).$$

Beispiel 90 (Value-at-Risk)**.** Eines der prominentesten Risikomaße ist das Value-at-Risk. Hierzu benötigt man ein Modell, also einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Wir geben uns ein Signifikanzniveau α vor und wären bereit, Verluste zu akzeptieren, die mit einer

Wahrscheinlichkeit von höchstens α auftreten, also

$$P(X < 0) \leq \alpha.$$

Wie sieht das zugehörige Risikomaß aus? Ist eine Position nicht akzeptabel, so fügen wir ihr so lange Kapital zu, bis sie akzeptal ist, was uns auf folgende Definiton führt:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \colon P(m + X < 0) \leq \alpha\}.$$

Ist z.B. X normalverteilt, so erhalten wir

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = E[-X] + \sigma^2(X)\Phi^{-1}(1-\alpha). \tag{91}$$

Dieses Risikomaß ist positiv homogen, aber im Allgemeinen nicht konvex (wohl aber unter der Normalverteilungsannahme).

In dem obigen Beispiel haben wir akzeptable Risiken betrachten. Dies ist ein mathematisch interessantes Objekt und wir definieren die **Akzeptanzmenge** des Risikomaßes ρ durch

$$\mathscr{A}_\rho := \{x \in \mathscr{X} : \rho(X) \leq 0\}. \tag{92}$$

Satz 93. *Sei ρ monetäres Risikomaß mit Akzeptanzmenge $\mathscr{A}\rho$. Dann gilt:*

(i) $\mathscr{A}_\rho \neq \emptyset$ *ist abgeschlossen in* $\mathscr{X}$ *bezüglich* $\|\cdot\|_\infty$ *und es gilt:*

$$\inf\{m \in \mathbb{R} \colon m \in \mathscr{A}_\rho\} > -\infty,$$
$$X \in \mathscr{A}_\rho,\ Y \geq X \quad \Rightarrow \quad Y \in \mathscr{A}_\rho.$$

(ii) $\mathscr{A}_\rho$ *bestimmt* ρ *durch folgende Gleichung:*

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \colon m + X \in \mathscr{A}_\rho\}. \tag{94}$$

Beweis. Die Lipschitzstetigkeit nach Lemma 87 impliziert für eine Folge (X_n) welche gegen in X in der Supremumsnorm konvergiert, dass $\rho(X) = \lim \rho(X_n) \leq 0$, also ist $X \in \mathscr{A}_\rho$. Weiterhin ist $m = \rho(0)$ immer akzeptabel und der letzte Teil von (i) folgt mit Monotonie.

Die Translationsinvarianz impliziert, dass

$$\begin{aligned}\inf\{m \in \mathbb{R} \colon m + X \in \mathscr{A}_\rho\} &= \inf\{m \in \mathbb{R} \colon \rho(m + X) \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \colon \rho(X) \leq m\} = \rho(X).\end{aligned}$$

□

Darstellungssätze

In diesem Abschnitt lernen wir Darstellungssätze von konvexen und kohärenten Risikomaßen kennen.

Wir betrachten dabei einen Grundraum Ω und eine zugehörige $\sigma-$Algebra $\mathscr{F}$. Die Sätze in diesem Kapitel gelten unter der Annahme $|\Omega| < \infty$. Für den allgemeineren Fall sei auf [14] verwiesen.

Mit $\mathscr{M}$ bezeichnen wir die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F})$.

[14] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2011

Beispiel 95. (Kohärente Risikomaße als verallgemeinerte Szenarien)
Sei $\widetilde{\mathcal{M}}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}$. Definiere für jedes $X \in \mathcal{X}$

$$\rho(X) := \sup_{P \in \widetilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}^P(-X).$$

Dann ist ρ kohärent: Die Linearität des Erwartungswertes impliziert $\rho(X+c) = \rho(X) - c$ und $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$, also ist ρ translationsinvariant und positiv homogen. Monotonie folgt aus der Monotonie des Ewartungswertes. Die Subadditivität gilt, da

$$\begin{aligned} \sup_{P \in \widetilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}^P(-X-Y) &= \sup\{\mathbb{E}^P(-X) + \mathbb{E}^P(-Y) : P \in \widetilde{\mathcal{M}}\} \\ &\leq \sup_{P \in \widetilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}^P(-X) + \sup_{P \in \widetilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}^P(-Y) = \rho(X) + \rho(Y). \end{aligned}$$

Überraschenderweise kann man alle kohärenten Risikomaße in dieser Form darstellen:

Satz 96. (*Darstellungssatz für kohärente Risikomaße*)
Sei $|\Omega| < \infty$ und $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\}$. Dann ist ρ ein kohärentes Risikomaß genau dann, wenn es eine Teilmenge $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ gibt, so dass

$$\rho(X) := \sup_{P \in \widetilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}^P(-X).$$

Darüber hinausgehend gibt es eine ähnliche Darstellung für konvexe Risikomaße.

Satz 97. (*Darstellungssatz für konvexe Risikomaße) Sei $|\Omega| < \infty$ und $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\}$. Dann ist ρ ein konvexes Risikoma? genau dann, wenn*

$$\rho(X) := \sup_{P \in \mathcal{M}} \left(\mathbb{E}^P(-X) - \alpha_{min}(P)\right),$$

wobei

$$\alpha_{min}(P) = \sup_{X \in A_\rho} \mathbb{E}^P(-X).$$

von Satz 97. Der Beweis besteht aus zwei Schritten. Zuerst zeigen wir

$$\rho(X) \geq \sup_{P\in\mathcal{M}} \big(\mathbb{E}^P(-X) - \alpha_{\min}(P)\big). \tag{98}$$

Zu beliebigen X ist $Y := X + \rho(X) \in A_\rho$, so dass

$$\alpha_{\min}(P) = \sup_{Z\in A_\rho} \mathbb{E}^P(-Z) \geq \mathbb{E}^P(-Y) = \mathbb{E}^P(-X) - \rho(X).$$

Daraus folgt $\rho(X) \geq \mathbb{E}^P(-X) - \alpha_{\min}(P)$ und somit (98). Als zweiten Schritt zeigen wir

$$\rho(X) \leq \sup_{P\in\mathcal{M}} \big(\mathbb{E}^P(-X) - \alpha_{\min}(P)\big).$$

Hierfür nutzen wir einen Trennungssatz für konvexe Mengen und konstuieren zu gegebenen X ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q = Q^X$, so dass $\rho(X) \leq \sup_{Q\in\mathcal{M}} \big(\mathbb{E}^Q(-X) - \alpha_{\min}(Q)\big)$ gilt.

Da ρ translationsinvariant ist, können wir o.B.d.A. $\rho(X) = 0$ und $\rho(0) = 0$ annehmen. Setze

$$B := \{Y \in \mathcal{X} : \rho(Y) < 0\}.$$

Dann ist B konvex, da ρ konvex ist, und $X \notin B$. Setze $|\Omega| = N$. Nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen gibt es ein $0 \neq l \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$\langle l, X\rangle \geq \langle l, Y\rangle$$

für alle $Y \in B$. Hierbei identifzieren wir jede Zufallsvariable Z mit dem Vektor $Z = (Z(\omega_1), \ldots, Z(\omega_N))^\top$. Der nächste Schritt ist die Konstruktion von $Q = Q^X$. Zunächst ist $l_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N$, denn für $\lambda \geq 0$ gilt[15] $1 + \lambda e_i > 0$, also $\rho(1 + \lambda e_i) = \rho(0) - 1 - \lambda e_i < 0$. Damit ist $-1 - \lambda e_i \in B$, und so

$$\langle l, X\rangle \geq \langle l, -1 - \lambda e_i\rangle = -\langle l, 1\rangle - \lambda\langle l, e_i\rangle$$

Da dies für alle $\lambda > 0$ gilt, folgt aus der Stetigkeit des Skalarproduktes, dass $\langle l, X\rangle \geq -\langle l, 1\rangle$ und damit $\langle l, e_i\rangle \geq 0$.

Weiterhin ist $l \neq 0$ und somit definiert

$$Q(\omega_i) := \frac{\langle l, e_i\rangle}{\langle l, 1\rangle}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass. Setze $c := \langle l, 1\rangle^{-1}$. Dann ist $\mathbb{E}^Q(X) = c\langle l, X\rangle$ und natürlich

$$\alpha_{\min}(Q) = \sup_{Y\in A_\rho} \mathbb{E}^Q(-Y) = \sup_{-Y\in B} c\langle -Y, l\rangle,$$

denn für jedes $Y \in A_\rho$ ist $Y - \varepsilon \in B$. Aus dem Trennungssatz hatten wir $\langle l, X\rangle \geq \langle l, Y\rangle$ und deswegen

$$\mathbb{E}^Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) = c \sup_{Y\in B}(\langle l, -X\rangle - \langle l, -Y\rangle) \geq 0 = \rho(X).$$

□

[15] Mit $e_1, \ldots, e_N$ seien die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^N$ bezeichnet.

Beispiel 99. (Average-Value-at-Risk oder Expected Shortfall)

Das Expected-Shortfall Risikomaß zu dem Niveau α ist definiert durch

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\lambda d\lambda.$$

Ist $\alpha \in (0,1)$ und q ein $\alpha-$Quantil von X, so gilt die Darstellung

$$ES_\alpha(X) = \alpha^{-1}\mathbb{E}((q - \mathrm{X})^+) - q$$

denn

$$\alpha^{-1}\mathbb{E}((q - \mathrm{X})^+) - q = \alpha^{-1}$$

Literaturverzeichnis

[1] Beatrice Acciaio, Julio Backhoff, and Gudmund Pammer. Quantitative fundamental theorem of asset pricing. 2022.

[2] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.

[3] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, 3 edition, 1995.

[4] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[5] Blanka N Horvath. Golden jubilee for an iconic financial formula, 2023.

[6] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000.