THORSTEN SCHMIDT

# WAHRSCHEINLICHKEITS-THEORIE

UNIVERSITÄT FREIBURG

# *Einführung*

Diese Vorlesung ist eine Fortführung der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie aus dem Wintersemester 17/18. Zum ersten Mal schließt sie direkt an die Stochastik an, so dass das Skriptum deutlich verändert wird. Das alte Skriptum kann aber als gute Ergänzung zu diesem genutzt werden.

Dieses Skriptum ist vorläufig ! Es enthält offensichtlich noch viele Fehler – also bitte mit dem entsprechenden Fingerspitzengefühl lesen. Für Rückmeldungen sind wir natürlich äußerst dankbar und würden uns über eine Email an Frau Hattenbach, der großen Dank für die Erstellung dieses Skriptums gebührt, sehr freuen. Bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Wahid Khosrawi-Sardroudi für das Durchsehen des Files und seine engagierte Unterstützung bei der Vorlesung.

Thorsten Schmidt

# *Ein kurzer Ausflug in die Maßtheorie*

Abbildung 1: Andrej Nikoljewitsch Kolmogorov - Foto by Konrad Jacobs

Die Entwicklung eines präzisen Begriffs für Wahrscheinlichkeit hat die Mathematiker sehr lange beschäftigt. Es war die Idee von Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) das Hilfsmittel *„Maß"* aus der Analysis hierfür zu verwenden und Zugang zu der mächtigen Maß-Integrationstheorie von Henri L. Lebesgue (1875–1941) zu erlangen.

Aus diesem Grund sind die Begriffe *Maß* und *Integral* für Stochastiker besonders wichtig. Im Unterschied zur Analysis, beziehungsweise zum Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, sind wir allerdings stets an endlichen Maßen ($\mu(\Omega) = 1$) interessiert, aber mit einem beliebigen $\Omega$.

## *Motivation und Überblick*

Das klassische Beispiel einer $\sigma$-Algebra ist die Borel $\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Sie wird von abzählbar vielen Mengen erzeugt: etwa von den Intervallen $(a, b]$ mit rationalen Intervallgrenzen. Diese Menge ist kein Ring, sondern lediglich ein Halbring[1] Wir werden also von einem Halbring starten und hieraus eine $\sigma$-Algebra und ein Maß konstruieren (Theorem 21, der Fortsetzungssatz).

Für die Erzeugung der Borel $\sigma$-Algebra muss man eigentlich lediglich wissen, was offene Mengen sind, denn $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ wird auch von allen offenen Mengen erzeugt. Man kan demnach allgemein auf topologischer Räumen arbeiten. Ein *topologischer Raum*[2] $(\Omega, \mathcal{O})$ ist ein Raum $\Omega$ und einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, wobei die Elemente von $\mathcal{O}$ als offen bezeichnet werden, so dass

(i) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{O}$

(ii) der endliche Schnitt von offenen Mengen ist wieder offen

(iii) die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen.

Hat man z.B. einen metrischen Raum (etwa die stetigen Funktionen über $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorem), so induziert dies eine Topologie über alle offenen Kugeln.

[1] Ein Halbring ist durchschnittsstabil und jedes $A \backslash B$ lässt sich als endliche Summe paarweise disjunkter Mengen darstellen.

[2] $\leftarrow$ topologischer Raum $(\Omega, \mathcal{O})$

## *Elementare Strukturen*

Sei $\Omega$ eine (beliebige) Menge. Betrachten wir für einen Moment $\Omega = [0,1]$. Wir ordnen jedem Intervall die Wahrscheinlichkeit $P((a,b]) = b-a$ zuordnen. Angenommen [3] wir wollten dieses Maß auf alle Teilmengen von $[0,1]$ ausdehnen, so dass (i) $P(\Omega) = 1$, $P$ ist $\sigma$-additiv für paarweise disjunkte Mengen, so kann man zeigen, dass keine solche Erweiterung existiert! Es sind einfach zu viele Mengen. Émile Borel entdeckte, dass wir dies aber auf einer kleineren Menge tun können.

[3] Dies führt zum berühmten Banach-Tarski Paradoxon.

**Definition 1.** Ein $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *$\sigma$-Algebra*, falls für alle $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ gilt, dass

(i) $\emptyset \in \mathscr{F}$
(ii) $A^c \in \mathscr{F}$
(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Mit $\mathscr{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Omega. Der Schnitt von (beliebig vielen) $\sigma$-Algebren ist wieder eine $\sigma$-Algebra ($\to$ Übung), so dass man für ein $C \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ die von ***C* erzeugte $\sigma$-Algebra** definiert durch

$$\sigma(C) = \bigcap \{\mathscr{F} \supseteq C : \mathscr{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}.$$

**Definition 2.** Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\mathscr{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{O})$ die *Borel-$\sigma$-Algebra* auf $(\Omega, \mathcal{O})$.

Hat $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis[4] $C$, so ist $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(C)$. $\to$ Übung.

Insbesondere erzeugt $C = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Das gilt auch für die 2-Punkt-Kompaktifizierung

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

[4] Eine Menge $C$ heißt Basis des topologischen Raumes $(\Omega, \mathcal{O})$, falls sich jede offene Menge als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $C$ schreiben lässt.

Oft gibt es geeignete, einfache erzeugende Systeme[5]. Etwa Monotone Klassen oder Dynkin Systeme.

[5] In der englischen Literatur heißt ein durchschnittsstabiles System $\pi$-System; ein Dynkin-System $\lambda$-System (siehe etwa Billingsley.

**Definition 3.** $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *monotone Klasse*, falls gilt:

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$
(ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$

Kann man in einer monotonen Klasse Komplemente bilden und ist $\Omega \in \mathscr{D}$, so ist sie ein Dynkin System.

**Definition 4.** $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt *Dynkin-System*, falls für alle $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D}$ gilt:

(i) $\Omega \in \mathscr{D}$
(ii) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{D}$
(iii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$

Natürlich ist jede $\sigma$-Algebra ein Dynkin-System. Mit Dynkin-Systemen lassen sich viele Aussagen über $\sigma$-Algebren elegant beweisen: Man nutzt hierbei ($\rightarrow$ Übung), dass beliebige Schnitte von Dynkin-Systeme wieder Dynkin Systeme sind. Hiermit können wir das von einer Menge $C$ erzeugte Dynkin-System $\lambda(C)$ definieren[6].

Dynkin-System als wichtige Beweistechnik

[6] Wie?

(i) Angenommen $\mathscr{F} = \sigma(C)$ wobei $C$ durchschnittsstabil ist
(ii) Alle Mengen in $C$ haben die Eigenschaft die wir nachweisen wollen
(iii) Man betrachtet nun die Menge $\mathscr{D}$ aller Teilmengen von $\mathscr{F}$ mit der gewünschten Eigenschaft.
(iv) Kann man zeigen, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist, so ist man fertig: Nach dem nun folgenden Satz ist $C \subseteq \mathscr{D}$. Das von $C$ erzeugte Dynkin-System $\lambda(C)$ ist gleich $\sigma(C) = \mathscr{F}$. Außerdem ist $\sigma(C) = \lambda(C) \subseteq \mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ und somit $\mathscr{D} = \mathscr{F}$.

Ein Mengensystem $\mathscr{C}$ heißt *durchschnittsstabil*, fall mit $A, B \in \mathscr{C}$ auch $A \cap C \in \mathscr{C}$.

**Lemma 5.** *Ist $\mathscr{D}$ Dynkin-System und $C \subseteq \mathscr{D}$ durchschnittsstabil, so gilt*

$$\sigma(C) \subseteq \mathscr{D}.$$

$\Rightarrow$ Jedes durchschnittsstabile Dynkin-System ist eine $\sigma$-Algebra.

*Beweis.* Wir definieren

$$\lambda(C) = \bigcap \{\mathscr{F} \subseteq C : \mathscr{F} \text{ Dynkin-System}\}$$

Da der Schnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, ist $\lambda(C) \subseteq C$. Der Rest des Beweises unterteilt sich in drei Schritte:
**1: $\lambda(C)$ ist durchschnittsstabil.** Seien $A, B \in \lambda(C)$. Sind $A, B \in C$, so folgt auch $A \cap B \in C \subseteq \lambda(C)$. Sei nun lediglich $B \in C$ und $A \in \lambda(C)$. Wir setzen[7]

$$\mathscr{D}_B := \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(C)\}.$$

[7] Ein erste Anwendung der Dynkin-Beweistechnik

Damit ist $\mathscr{D}_B$ ein Dynkin-System, denn für $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{D}_B$ gilt

(i) $\Omega \in \mathscr{D}_B$
(ii) $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \lambda(C)$ mit $A_1 \subseteq A_2$:
$\Rightarrow A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \Rightarrow (A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \backslash (A_1 \cap B) \in \lambda(C)$.
(iii) ebenso $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \ldots$

$$\Rightarrow \Big( \cup_i A_i \Big) \cap B = \cup_i (A_i \cap B) \in \lambda(C).$$

Da $C \subset \mathscr{D}_B$ folgt nun $\lambda(C) \subseteq \mathscr{D}_B$. Wir erhalten für $A \in \lambda(C) \subseteq \mathscr{D}_B$, dass

$$A \cap B \in \lambda(C). \qquad \text{(Def. von } \mathscr{D}_B\text{)}$$

Nun setzen wir für $A \in \lambda(C)$[8]

$$\mathscr{D}_A := \{B \subseteq \Omega : A \cap B \in \lambda(C)\}.$$

Wie vorher zeigt man, dass $\mathscr{D}_A$ ein Dynkin-System ist mit $C \subset \mathscr{D}_A$ $\Rightarrow \lambda(C) \subseteq \mathscr{D}_A$, also für $A, B \in \lambda(C)$ gerade

$$A \cap B \in \lambda(C). \qquad \text{Das war 1)}$$

**2:** $\lambda(C)$ **ist** $\sigma$**-Algebra.** Für $A_1, A_2, \ldots \in \lambda(C)$ ist $A_i^c \in \lambda(C)$ und somit

$$\Big( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big) = \Big( \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \Big)^c \in \lambda(C) \qquad (\lambda(c) \cap\text{-stabil})$$

und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \lambda(C).$$

3: Abschließend erhalten wir $\sigma(C) \subseteq \sigma(\lambda(C)) = \lambda(C) \subseteq \mathscr{C}$. $\square$

[8] Ein zweites Mal der Dynkin-Trick.

# *Literaturverzeichnis*

[1] V. I. Bogachev. *Gaussian Measures*. American Mathematical Society, 1991.

[2] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000.