Funktionalanalysis

Sommersemester 2020

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 8

Abgabe: 09.07.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Für jede reelle Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die Norm

$$\|a\| := \|a\|_1 + \|a\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

1. Der Raum $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist nicht reflexiv.
   Hinweis: Satz von Eberlein-Šmuljan.
2. Die Norm $\|\cdot\|$ ist strikt konvex.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ strikt konvex ist, und nutzen Sie dann Aufgabe 28.
3. Die Norm $\|\cdot\|$ ist nicht gleichmäßig konvex.
   Hinweis: Sie können ein Gegenbeispiel konstruieren. Eine andere Möglichkeit ist zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist und dass ein reflexiver Banachraum reflexiv bleibt, wenn seine Norm durch eine äquivalente Norm ersetzt wird, und dann richtig argumentieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $C \subset X$ konvex, nicht leer und abgeschlossen. Zeigen Sie das Folgende:

1. Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein Element $P_C x \in C$ so, dass gilt
   $$\|P_C x - x\|_X = \inf_{y\in C} \|y - x\|_X.$$
2. Jede Minimalfolge in C bezüglich x, d.h. eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von C mit der Eigenschaft
   $$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|_X = \inf_{y\in C} \|y - x\|_X,$$
   konvergiert stark gegen $P_C x$.
3. Die Abbildung $P_C : X \to X$ ist stetig.
   Hinweis: Wenn $x_n \to x$ gilt, kann man die Ungleichung
   $$\limsup_{n\to\infty} \|P_C x_n - x\|_X \le \inf_{y\in C} \|y - x\|_X$$
   beweisen und dann (b) nutzen .