Funktionalanalysis

Sommersemester 2020

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 7

Abgabe: 02.07.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei X ein Banachraum mit $\dim X = \infty$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Jede schwache (d.h. bezüglich $\tau(X, X^*)$) Umgebung der Null enthält einen nichttrivialen Vektorraum W.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $W = \bigcap_{j=1}^{n} \ker \phi_j$ mit gewissen $\phi_j \in X^*$, $j = 1, \dots, n$, gilt.

(b) Die schwache Topologie auf X ist nicht normierbar.
Hinweis: Wenn sie durch eine Norm $\|\cdot\|$ induziert wäre, dann wäre der Einheitsball (bezüglich $\|\cdot\|$) eine Umgebung der Null.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei X ein Banachraum mit $\dim X = \infty$. Mit S_X bezeichnen wir die Einheitssphäre

$$S_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Wenn X^* separabel ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von S_X so, dass $x_n \rightharpoonup 0$.
Hinweis: Nutzen Sie, dass die schwache Topologie auf B_X metrisierbar ist, wenn X^* separabel ist.

(b) Es existiert ein abgeschlossener separabler Unterraum $X_0 \subset X$ mit $\dim X_0 = \infty$.

(c) Wenn X reflexiv ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von S_X so, dass $x_n \rightharpoonup 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei X ein Banachraum.

(a) Seien $f_n \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $\langle f_n, x\rangle$ für jedes $x \in X$ gegen eine reelle Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $f \in X^*$ existiert so, dass $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Sei X zusätzlich reflexiv. Seien $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $\langle f, x_n\rangle$ für jedes $f \in X^*$ gegen eine reelle Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert so, dass $x_n \rightharpoonup x$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Norm $\|\cdot\|_X$ ist strikt konvex.

(b) Wenn $x, y \in B_X \setminus \{0\}$ und $\|x + y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$ gilt, dann existiert ein $\lambda > 0$ so, dass $x = \lambda y$ ist.