UNI FREIBURG

**Funktionalanalysis** **Sommersemester 2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

# Übung 6

**Abgabe: 25.06.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com**

**Anmerkung.** Auf der Homepage befindet sich eine Verlinkung zu angekündigter Doodle-Umfrage zur Feststellung eines geeigneten Klausurtermins. Bitte tragen Sie sich dort ein.

**Aufgabe 1** (5 Punkte)**.** Seien $X$, $Y$ Banachräume, $T \in L(X, Y)$ und $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Wenn $x_n \rightharpoonup 0$ in $X$, dann $Tx_n \rightharpoonup 0$ in $Y$.

(b) Wenn $T$ zusätzlich bijektiv ist und $Tx_n \rightharpoonup 0$ in $Y$, dann $x_n \rightharpoonup 0$ in $X$.

**Aufgabe 2** (5 Punkte)**.** Sei $X$ ein Banachraum und $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $x_n \rightharpoonup x$ in $X$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \rightharpoonup x, \quad \text{wenn } n \to \infty.$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.** Sei $E := (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Wir betrachten den Operator $A : D(A) \subset E \to E$ mit $D(A) := C^1([0,1])$ und $Au := u'$.

(a) Zeigen Sie $\overline{D(A)} = E$.

(b) Untersuchen Sie, ob $A$ beschränkt und/oder abgeschlossen ist.

(c) Sei $B : D(B) \to E$ mit $D(B) := C^2([0,1]) \subset E$ und $Bu := u'$. Untersuchen Sie, ob $B$ abgeschlossen ist.

**Aufgabe 4** (5 Punkte)**.** Seien $X$, $Y$ Banachräume, $T \in L(X, Y)$ und sei $A : D(A) \subset X \to Y$ ein dicht-definierter abgeschlossener linearer Operator. Wir definieren den Operator $B : D(A) \subset X \to Y$ durch $B = A + T$. Zeigen Sie das Folgende:

(b) $B$ ist abgeschlossen.

(a) $D(A^*) = D(B^*)$.

(c) $B^* = A^* + T^*$.