Funktionalanalysis

Sommersemester 2020

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 5

Abgabe: 18.06.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei

$$D(A) := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n u_n < \infty \right\}.$$

Definiere den Operator $A : D(A) \subset \ell^1 \to \ell^1$ durch

$$A\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := (n u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{D(A)} = \ell^1$ gilt und A abgeschlossen ist.
Hinweis: Sie können zuerst zeigen, dass $\overline{c_{00}} = \ell^1$ gilt, wobei c_{00} reelle Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen sind.

(b) Bestimmen Sie $D(A^*)$ und A^*.

(c) Zeigen Sie $\overline{D(A^*)} \neq (\ell^1)^*$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega = (-1, 1)$ und seien $f(x) = |x|$, $g(x) := \chi_{[0,1)}(x)$ für $x \in \Omega$.

(a) Berechnen Sie die schwache Ableitung der Funktion f auf Ω.

(b) Zeigen Sie, dass keine messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert so, dass $g' = h$, wobei g' die schwache Ableitung von g ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $h = 0$ f.ü. schon gelten müsste, was ein Widerspruch ist.

(c) Finden Sie ein Maß μ auf Ω so, dass $g' = \mu$ gilt, d.h. für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{-1}^{1} g(x)\phi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} \phi(x)dm.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** (a) Seien $f_n, f \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $f_n \rightharpoonup f$. Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen f konvergiert.

(b) Sei X ein Banachraum und $K \subset X$ eine kompakte Untermenge (in der starken Topologie) und seien $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und $x \in X$ so, dass $x_n \rightharpoonup x$. Zeigen Sie, dass schon $x_n \to x$ und $x \in K$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Seien b^k, $b \in \ell^1$, $k \in \mathbb{N}$, so, dass $b^k \rightharpoonup b$ in ℓ^1. Zeigen Sie, dass schon $b^k \to b$ in ℓ^1 gilt. (Hier benutzt man die Notation $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
Hinweis: Setzen Sie voraus, dass die Aussage falsch ist. Dann können Sie einen Beweis durch Widerspruch in folgenden Schritten durchführen:

(a) Es existieren a^k mit $\|a^k\|_1 = 1$, $k \in \mathbb{N}$, so, dass $a^k \rightharpoonup 0$ gilt.

(b) Man findet eine Teilfolge a^{k_j} und disjunkte Mengen $M_j \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n\in M_j} |a_n^{k_j}| > \frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus M_j} |a_n^{k_j}| < \frac{1}{4}.$$

(c) Man konstruiert ein Funktional $u \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ so, dass $\langle u, a^{k_j}\rangle > \frac{1}{4}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.