

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt

Übung: Marc Weber

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020>

Übung 2

Abgabe: 11.06.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Definition. Eine Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ heißt eine *Young-Funktion*, falls $\Phi(0) = 0$ gilt, Φ strikt wachsend und konvex ist, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t) t^{-1} = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) t^{-1} = \infty$. Die mit Φ konjugierte Funktion ist dann die Funktion

$$\Phi^*(t) := \sup_{s \geq 0} st - \Phi(s), \quad t \geq 0.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Man definiert die *Orlicz-Klasse* $\mathcal{L}^\Phi(\Omega)$ als das System aller messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx < \infty.$$

Definition. Sei $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $p \in [1, \infty]$. Definiere

$$\|\mathbf{a}\|_p := \begin{cases} (\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \in [1, \infty); \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Der Raum ℓ^p besteht aus allen reellen Folgen \mathbf{a} mit $\|\mathbf{a}\|_p < \infty$. Für alle $p \in [1, \infty]$ ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Weiter bezeichnen wir mit c_0 den Raum aller zu Null konvergierenden reellen Folgen.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine Young-Funktion. Zeigen Sie das Folgende:

- Die konjugierte Funktion Φ^* ist wieder eine Young-Funktion.
- Falls eine Konstante $C > 0$ existiert so, dass $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt, dann ist \mathcal{L}^Φ ein linearer Raum.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C([0, 1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $(C([0, 1]), \|\cdot\|)$ ist vollständig.
- Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zur der Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0, 1])$ ist.

Hinweis: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Identitätsabbildung zwischen den Räumen $(C([0, 1]), \|\cdot\|)$ und $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ an.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Zeigen Sie, dass $(\ell^1)^*$ isometrisch isomorph zu ℓ^∞ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Im Sinne von Aufgabe 15 können wir $(\ell^1)^*$ mit ℓ^∞ identifizieren. Wegen $c_0 \subset \ell^\infty$ gilt dann $c_0 \subset (\ell^1)^*$. Bestimmen Sie

$$c_0^\perp = \{x \in \ell^1 \mid \langle f, x \rangle = 0 \text{ für alle } f \in c_0\},$$

$$c_0^{\perp\perp} = \{f \in (\ell^1)^* = \ell^\infty \mid \langle f, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in c_0^\perp\}.$$

Verifizieren Sie $c_0^{\perp\perp} \neq c_0$.