Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 11

Abgabe: 30.07.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Im Folgenden sei $L^2((-\pi,\pi))$ der komplexe normierte Vektorraum der messbaren Funktionen $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{C}$, wobei die Norm $\|\cdot\|_2$ durch das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

induziert ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$e_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi,\pi))$ bilden.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion so, dass $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f\in C^1(\mathbb{R})$ gilt. Sei $x_0\in[-\pi,\pi]$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ definieren wir $P_nf := \sum_{k=-n}^{n}(f,e_k)e_k$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(P_nf)(x_0)-f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+z)-f(x_0))e^{-ikz}dz\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+z)-f(x_0)}{1-e^{-iz}}\left(e^{2inz}-e^{-i(n+1)z}\right)dz.\end{aligned}$$

Hinweis: $\sum_{k=-n}^{n}e^{-ikz}$ *summiert man als eine geometrische Reihe.*

(b) Die Funktion $g:(0,2\pi)\to\mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) := \frac{f(x_0+z)-f(x_0)}{1-e^{-iz}},$$

ist beschränkt auf $(0,2\pi)$, d.h. es gilt $\sup_{z\in(0,2\pi)}|g(z)|<\infty$.

(c) Es gilt $(P_nf)(x_0)\to f(x_0)$, d.h. die Fourierreihe konvergiert punktweise.
Hinweis: Wenn $g\in L^2((-\pi,\pi))$ *ist, kann man Aufgabe 1(a) auf* (g,e_{-2n}) *und* (g,e_{n+1}) *anwenden.*

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Orthonormalsystem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vollständig in $L^2((-\pi,\pi))$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Dichtheit glatter Funktionen und die restlichen Aufgaben.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $k\in L^2(\Omega\times\Omega)$ definieren wir

$$(Kf)(x) := \int_\Omega k(x,y)f(y)dy.$$

1. Sei $k\in C(\overline{\Omega\times\Omega})$. Zeigen Sie, dass $K:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ dann kompakt ist.
   Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Arzelà-Ascoli, dass $K:L^2(\Omega)\to C(\overline{\Omega})$ *kompakt ist.*
2. Sei $k\in L^2(\Omega\times\Omega)$. Zeigen Sie, dass $K:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ dann kompakt ist.
   Hinweis: Approximieren Sie k *und nutzen Sie, dass der Grenzwert kompakter Operatoren kompakt ist.*