Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber

https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 10

Abgabe: 23.07.20 bis 18 Uhr per E-Mail an FunkAnaAbgabenFr2020@gmail.com

Aufgabe 1 (5 Punkte). Für $x \in [0,1]$ seien $f(x) := 1$ und $f_n(x) := 1 + \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $f_n \rightharpoonup f$ schwach in $L^1(0,1)$,

(b) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$,

(c) f_n konvergiert nicht stark gegen f in $L^1(0,1)$.

Hinweis: In (a) dürfen Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue benutzen.

Aufgabe 2 (7 Punkte). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum derart, dass die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$(x,y) := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big).$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für alle $x, y \in X$ gilt $(x,y) = (y,x)$ und $(x,x) \geq 0$.

(b) Mit festen $x, y \in X$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda x, y)$ stetig.

(c) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $(x, 2y) = 2(x,y)$. Nutzen Sie dann die Darstellung $x \pm y = \big(x \pm \frac{y+z}{2}\big) \pm \big(\frac{y-z}{2}\big)$ und $x \pm z = \big(x \pm \frac{y+z}{2}\big) \mp \big(\frac{y-z}{2}\big)$.

(d) Für alle $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$.
Hinweis: Zeigen Sie es nacheinander für $\lambda = -1$, $\lambda \in \mathbb{N}$ (hier hilft (c)), $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (hier hilft (b)).

(e) Das Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ induziert die Norm $\|\cdot\|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). (a) Jede Norm auf einem Vektorraum, die durch ein Skalarprodukt induziert ist, erfüllt die Parallelogrammgleichung. Beweisen Sie dies.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum derart, dass zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A), \mu(B) \in (0,\infty)$ existieren. Sei $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega,\mu)$ kein Hilbertraum ist.
Hinweis: Finden Sie $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$ mit disjunkten Trägern, die die Parallelogrammgleichung nicht erfüllen.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $(H, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum, $K \subset H$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Menge und $P_K : H \to K$ die Projektion auf K. Zeigen sie, dass für alle $y \in K$ gilt

$$\|y - P_K x\|^2 \leq \|y - x\|^2 - \|P_K x - x\|^2$$

und

$$\|y - P_K x\| \leq \|y - x\|.$$

Hinweis: Nutzen Sie, dass $(x - P_K x,\ y - P_K x) \leq 0$ für $y \in K$ gilt.