Funktionalanalysis

Sommersemester 2020

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 1

Abgabe: 18.05.20 bis 18 Uhr per E-Mail.

Hilfreiche Definitionen: Eine algebraische Basis (Hamel-Basis) eines Vektorraumes X ist eine linear unabhängige Menge $\mathcal{B} \subset X$, so dass jedes $x \in X$ als endliche Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellbar ist. Die Dimension von X ist die Anzahl der Elemente von $\mathcal{B}$.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist Lipschitz-stetig,

(b) A ist stetig,

(c) A ist stetig in 0,

(d) $\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||_Y < \infty$,

(e) A ist beschränkt.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Überprüfen Sie, ob der Operator $T : X \to Y$ linear ist und ob er stetig und/oder beschränkt ist.

(a) $X = \left(C^1\left([0,1]\right), ||\cdot||_\infty\right), Y = \left(C\left([0,1]\right), ||\cdot||_\infty\right), Tf = f'$.

(b) $X = \left(L^1\left([0,1]\right), ||\cdot||_1\right), Y = \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right), Tf = \sup\{c \geq 0 | c \leq |f| \text{ fast überall auf } [0,1]\}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Vektorraum mit algebraischer Basis $\mathcal{B}$.

(a) Sei $\varphi \in L(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass φ durch seine Werte auf $\mathcal{B}$ definiert ist, d.h. wenn $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ definiert ist, dann existiert genau ein lineares Funktional $\bar{\phi} : X \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass ein unbeschränktes lineares Funktional $\phi : X \to \mathbb{R}$ genau dann existiert, wenn $\dim X = \infty$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie eine abzählbare Untermenge der Basis und definieren Sie ein geeignetes Funktional darauf.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Seien (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge M ist genau dann offen, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.

(b) Der Abschluss der Menge M ist abgeschlossen.

(c) Das Innere der Menge M ist offen.

(d) M abgeschlossen $\Longrightarrow$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x$ gilt $x \in M$.

(e) Setzen wir voraus, dass jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dann gilt auch „$\Longleftarrow$“ in (d).