Funktionalanalysis **Sommersemester 2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2020/vorlesung-funktionalanalysis-ss-2020

Übung 2

Abgabe: 28.05.20 bis 18 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $X = \big(L^\infty(-1,1), \|\cdot\|_\infty\big)$. Für $f \in X$ definiere

$$\langle \varphi, f\rangle = \varphi(f) := \int_{-1}^{1} t f(t) dt.$$

1. Berechnen Sie die Norm $\|\varphi\|_{X^*}$.
2. Finden Sie eine Funktion $f \in X$ mit $\|f\|_X = 1$ so, dass $\varphi(f) = \|\varphi\|_{X^*}$ gilt, oder beweisen Sie, dass keine solche Funktion existiert.
3. Beantworten Sie (a) und (b), falls $X = \big(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien X, Y Banachräume, $(X_0, \|\cdot\|_X)$ ein dichter Untervektorraum von X und sei $T \in L(X,Y)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|T(x)\|_Y = \sup_{\substack{x\in X_0\\ \|x\|_X=1}} \|T(x)\|_Y.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein Untervektorraum mit $\dim E < \infty$. Zeigen Sie, dass E abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte). Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Für jedes $x \in X$ definiere $\hat{x} := \{z \in X \mid x - z \in E\}$. Dann ist

$$X/E := \{\hat{x} \mid x \in X\}$$

ein Vektorraum. Wir definieren

$$\|\hat{x}\|_{X/E} := \inf_{y\in E} \|x - y\|_X.$$

Zeigen Sie das Folgende:

1. $\|\hat{x}\|_{X/E}$ ist wohldefiniert, d.h. aus $\hat{x} = \hat{z}$ folgt $\|\hat{x}\|_{X/E} = \|\hat{z}\|_{X/E}$.
2. $\|\cdot\|_{X/E}$ ist eine Norm auf X/E. Dies ist die *Quotientennorm.*
3. $(X/E, \|\cdot\|_{X/E})$ ist ein Banachraum.
   Hinweis: Sei $(\hat{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in X/E. Dann kann man wie folgt vorgehen:
   (i) Wählen Sie eine Teilfolge $(\hat{x}_k)_k$ so, dass $\|\hat{x}_k - \hat{x}_j\|_{X/E} \le 2^{-k}$ für alle $j \ge k$ gilt;
   (ii) Wählen Sie eine Folge $(e_k)_k$ in E so, dass $\|x_k - e_k - x_{k+1} + e_{k+1}\|_X \le \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k+1}\|_{X/E} + 2^{-k}$ gilt;
   (iii) $x_k - e_k \to x \in X$;
   (iv) $\|\hat{x}_k - \hat{x}\|_{X/E} \to 0$.