Finanzmathematik in diskreter Zeit

Version vom: 11. Mai 2020

Prof. Dr. Thorsten Schmidt[1]

[1] Universität Freiburg. www.stochastik.uni-freiburg.de/schmidt

Vorwort

Dieses Skriptum ist aus einer Vorlesung entstanden, die im SS2017 und im SS 2020 in Freiburg gehalten wurde. Es enthält sicher noch viele Fehler und wird kontinuierlich überarbeitet. Über Hinweise hierzu würde ich mich sehr freuen. Die Vorlesungen im SS 2020 werden mit

Motivation

Betrachten wir einen Index mit Wert $S_0 = 11.000$. Sie möchten auf steigende Kurse setzen und ziehen den Kauf eines Calls mit Ausübrungspreis (Strike) von $K = 11.500$ in Betracht. Als zugrundeliegendes Modell kommen für Sie zwei zukünftige Szenarien in Frage: der Kurs steigt auf 12.000 oder fällt auf 10.000. Hierzu ordnen Sie (subjektiv, oder aus statistischen Methoden) die Wahrscheinlichkeiten $1/3$ und $2/3$ zu. Das führt zu folgendem Modell:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 12.000 & \omega = \omega_1, \\ 10.000 & \omega = \omega_2, \end{cases}$$

wobei S_1 der Wert des zufälligen Aktienkurses (Stock) zur Zeit 1 ist. Die Auszahlung des Calls and 1 ist $C_1 := (S_1 - K)^+ = \max\{S_1 - K, 0\}$, also

$$C_1(\omega) = \begin{cases} 500 & \omega = \omega_1, \\ 0 & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Was wären Sie bereit für dieses Derivat zu bezahlen?

Eine Umfrage unter den Teilnehmern des Kurses gibt einige Angebote in der Nähe von 167. Gehen wir also von einem Angebot von 167 aus. Als geschickter Marktteilnehmer kaufe ich den Call und verkaufe gleichzeitig (leer) 0,25 Aktien (wieso gerade 0,25??), den verbleibenden Betrag lege ich auf das Bankkonto. Das ergibt folgende Rechnung:

Call kaufen	-167
Erlös aus Aktienverkauf	2.750
Restgeld auf Konto	-2.583

und alles geht auf. Summe der Ausgaben an $t = 0$ sind 0.

An Zeitpunkt 1 gibt es zwei Möglichkeiten: Angenommen wir beobachten ω_1. Dann hat das Portfolio folgenden Wert:

Call zahlt aus:	500
-0.25 Aktie wird verkauft	-3.000
Restgeld auf Konto	2.583
Erlös	83

Für die Beobachtung von ω_2 erhalten wir folgenden Wert:

Call zahlt aus:	0
-0.25 Aktie wird verkauft	-2.500
Restgeld auf Konto	2.583
Erlös	83

In jedem Fall gewinne ich mit dieser Strategie 83, und zwar sicher(!). Der Call war offensichtlich 83 Geldeinheiten zu günstig. Wie kann man sich sicher sein, dass man solche Bewertungsfehler vermeidet? Dies ist ein Hauptziel dieser Vorlesung. Bemerkenswert auch, dass die Wahrscheinlichkeiten gar keine Rolle spielten! Woher bekomme ich die Anzahl der zu verkaufenden Aktien?

Wir werden noch weitere andere interessante Punkte streifen, unter anderem:

- No-Arbitrage Theorie in diskreter Zeit,
- Hedging,
- Risikomaße und deren Schätzung,
- Modellrisiken,
- Zinsmärkte und affine Modelle,
- Konsistente Kalibrierung,
- Unendlichdimensionale Finanzmärkte.

I Das Mehrperiodenmodell

Ein hervorragnedes Buch zu diesem Thema ist Föllmer and Schied (2011). Wir folgen zunächst im wesentlichen diesen Buch, beginnen aber gleich mit dem Mehrperiodenmodell. Wir betrachten im Folgenden stets einen festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass P typischerweise in der Praxis nicht bekannt ist und hierdurch ein *Modellrisiko* entsteht. Manche der Resultate (etwa in einem vollständigen Modell wie dem Binomialmodell) werden sogar unabhängig von P formuliert werden können (genauer: lediglich von den Nullmengen von P abhängig). Es ist ein sehr aktuelles und interessantes Gebiet der Finanzmathematik, diese Annahme fallen zu lassen und wir werden diesen Punkt am Ende der Vorlesung ausführlicher diskutieren.

Für eine Zuvallsvariable X verwenden wir $X \geq 0$ als Abkürzung für $X \geq 0$ P-fast sicher und machen das im Folgenden nicht mehr kenntlich (ebenso natürlich für $=$ und $\leq$).

1 Einführung

Ein Finanzmarkt besteht aus $d+1$ Wertpapieren, welche alle nicht-negative Werte annehmen. Wir modellieren die Preise der Wertpapiere durch stochastische Prozesse. Den Preisprozess des i-ten Wertpapiers bezeichnen wir mit

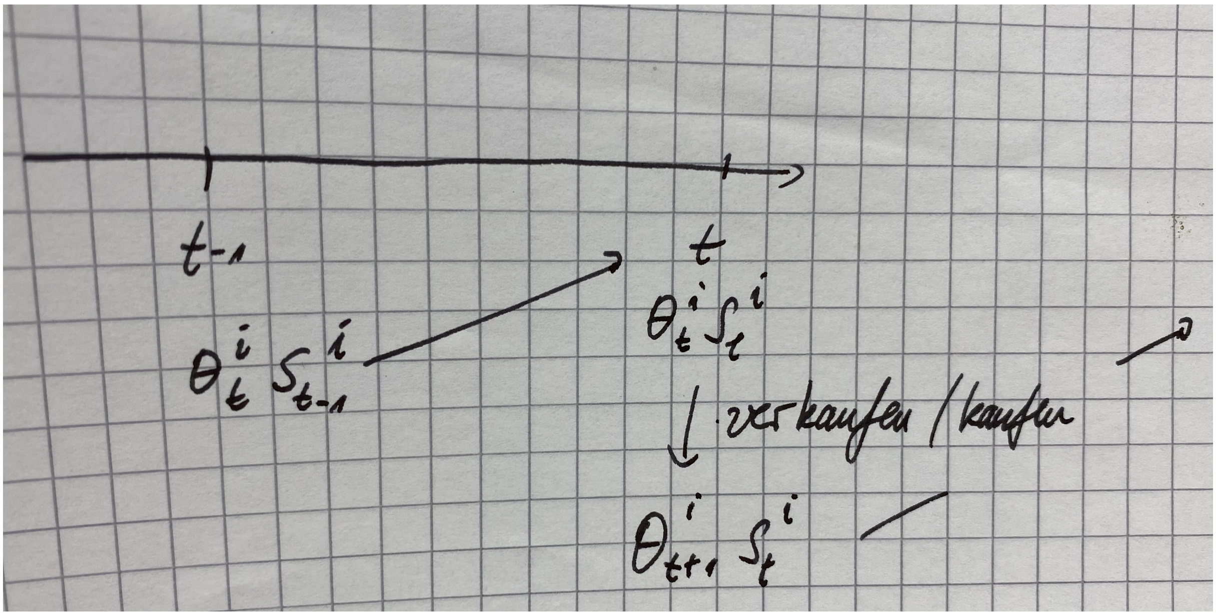
$$S^i = (S^i_t)_{t \in \mathbb{T}},$$

wobei $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ mit einem fixen Zeithorizont $T > 0$. Das 0-te Wertpapier ist das sogenannte Bankkonto (oder numéraire), und wir nehmen an, dass $P(S^0_t > 0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Die zur Verfügung stehende Information wird durch eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ beschrieben, das ist eine wachsende Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$. Im Allgemeinen schreiben wir $\bar{S} = (S^0, S)$ für alle $d+1$ Wertpapiere und $S = (S^1, \ldots, S^d)$ für die d Wertpapiere ohne das Bankkonto.

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=0,\ldots,T}$ heißt *adaptiert*, falls X_t $\mathscr{F}_t$-messbar ist für alle $t = 0, \ldots, T$. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t=1,\ldots,T}$ heißt *vorhersehbar*, falls X_t $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar ist für alle $t = 1, \ldots, T$.

Definition 1.1. Eine *Handelsstrategie* $\bar{H}$ ist ein vorhersehbarer, $(d+1)$-dimensionaler stochastischer Prozess. Sie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t, \quad t = 1, \ldots, T-1.$$



Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie wird beim Umschichten des Portfolios kein neues Geld benötigt und der gesamte Betrag reinvestiert. Wir führen die Notation $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$ für die *Zuwächse* von S ein.

Lemma 1.2. *Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ und $t \geq 1$ ist*

$$\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 + \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta \bar{S}_k.$$

Beweis. Das sieht man in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t &= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} - \bar{H}_t \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \bar{H}_t \cdot (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + \bar{H}_{t-1} \cdot \bar{S}_{t-1} \\
&= \sum_{k=2}^{t} \bar{H}_k \cdot (\bar{S}_k - \bar{S}_{k-1}) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\bar{H}$ selbstfinanzierend ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_1 \cdot \bar{S}_1 &= \bar{H}_1 \bar{S}_1 + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 - \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0 \\
&= \bar{H}_1 (\bar{S}_1 - \bar{S}_0) + \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0
\end{aligned}$$

und Gleichung (1) ist erfüllt. $\square$

B 1.1 *Bankkonto*: Oft betrachtet man das Bankkonto als Numéraire. Dabei ist $(r_t)_{1\leqslant t\leqslant T}$ ein vorhersehbarer Prozess, der den Zins beschreibt. Das Bankkonto startet mit dem Wert $S_0^0 = 1$ und hat an t den folgenden Wert:

$$S_t^0 = \prod_{s=1}^{t}(1 + r_s).$$

Viele Resultate sind bezüglich diesem speziellen Numéraire definiert. Wir nehmen mindestens an, dass $r_s > -1$ für alle $s = 1, \dots, T$. Typischerweise kann man sogar noch annehmen, dass r vorhersehbar ist und manchmal verlangt man auch nicht-negative Zinsen, also $r \geq 0$. ◇

Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten macht man vergleichbar, indem man mit einer Referenz *diskontiert*. Wir führen den *diskontierten Preisprozess*

$$X_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad t = 0, \dots, T, \quad i = 0, \dots, d$$

ein. Hierbei ist $X_t^0 \equiv 1$ für alle $0 \leq t \leq T$ und die Referenz auf X^0 verschwindet sogar. Starten wir mit einer Handelstrategie $\bar{H}$, so nutzen wir die Notation H für den Verweis auf die letzten d Komponenten von H, verwenden also stets die Darstellung $H = (H^0, H)$. Dies sieht man insbesondere in der Darstellung des diskontierten Gewinnprozesses.

Definition 1.3. Der *diskontierte Wertprozess* $V = V^{\bar{H}}$ der Handelsstrategie $\bar{H}$ ist

$$V_t := \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \dots, T$$

und $V_0 := \bar{H}_1 \cdot \bar{X}_0$. Der *diskontierte Gewinnprozess* $G = G^{\bar{H}}$ ist

$$G_t := \sum_{k=1}^{t} H_k \cdot \Delta X_k, \quad t = 1, \dots, T$$

mit $G_0 = 0$.

Da $X_k^0 - X_{k-1}^0 = 0$ ist, folgt für alle $0 \leqslant t \leqslant T$, dass

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \bar{H}_k \cdot \Delta \bar{X}_k.$$

Weiterhin ist

$$V_t = \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \frac{\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t}{S_t^0}.$$

Satz 1.4. *Sei $\bar{H}$ eine Handelsstrategie. Dann sind äquivalent:*

(i) $\bar{H}$ *ist selbstfinanzierend,*

(ii) $\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t, \quad t = 1, \dots, T-1,$

(iii) $V_t = V_0 + G_t \quad$ *für* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Beweis. $\bar{H}$ ist selbstfinanzierend,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_t \cdot \frac{\bar{S}_t}{S_t^0} = \bar{H}_{t+1} \frac{\bar{S}_t}{S_t^0}, \quad t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

und somit ist (i) äquivalent zu (ii). Außerdem gilt für alle $t = 0, \dots, T-1$, dass

$$\begin{aligned} & \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_t \\ \Leftrightarrow \qquad & \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{X}_{t+1} - \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot (\bar{X}_{t+1} - \bar{X}_t) = H_{t+1}(X_{t+1} - X_t). \end{aligned}$$

Dies ist nun äquivalent zu

$$V_t - V_0 = \sum_{s=1}^{t} H_s(X_s - X_{s-1}), \quad t = 1, \dots, T$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.1 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie)**.** Startet man mit dem Betrag V_0 und einer d-dimensionalen Handelsstrategie H, so kann man eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ bestimmen: Dies geschieht durch die die Wahl von

$$H_{t+1}^0 - H_t^0 = -(H_{t+1} - H_t) \cdot X_t$$

und $H_1^0 = V_0 - H_1 \cdot X_0$. Sprechen wir im Folgenden von einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie H, so meinen wir genau diese eindeutige Erweiterung $\bar{H}$.

1.1 Arbitrage und Martingalmaße

Wir kommen zu dem wichtigen Konzept einer Arbitrage. Das ist im Prinzip eine Möglichkeit, ohne Risiko Gewinne zu erwirtschaften. Natürlich gibt es solche Möglichkeiten an den Finanzmärkten, aber es wäre äußerst ungünstig, wenn ein Modell dies erlauben würde: Die Marktteilnehmer könnten das ausnutzen um auf unsere Kosten risikolose Gewinne zu erzielen! Wir beginnen mit einer präzisen Definition.

Definition 1.5. Eine *Arbitrage* ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H, so dass für den zugehörigen (diskontierten) Wertprozess V gilt, dass

(i) $V_0 \leqslant 0$,
(ii) $V_T \geqslant 0$ und
(iii) $P(V_T > 0) > 0$.

Ein Finanzmarkt, in dem keine Arbitragemöglichkeiten existierten, heißt *arbitragefrei.*

Für arbitragefrei nimmt man gerne auch die englische Abkürzung NA - no arbitrage. Die Definition ist unter den getroffenen Annahmen dazu äquivalent, dass der undiskontierte Wertprozess die obigen Bedingungen erfüllt (Wieso?).

Satz 1.6. *Ein Finanzmarkt ist arbitragefrei genau dann, wenn jeder Ein-Perioden-Finanzmarkt* (S_t, S_{t+1}), $t = 0, \dots, T-1$ *arbitragefrei ist.*

Beweis. Wir zeigen: Es existiert eine Arbitrage genau dann, wenn ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert, s.d. $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant P$-fast sicher und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$.

Wir starten mit der Hinrichtung: Sei $\bar{H}$ eine Arbitrage mit Wertprozess V. Wir setzen

$$t := \min\{s \in \{0, \dots, T\} : V_s \geqslant 0 \text{ und } P(V_s > 0) > 0\}$$

mit der Konvention $\min \emptyset = \infty$. Dann ist $t \leqslant T$, da $\bar{H}$ eine Arbitrage ist. Entweder ist $V_{t-1} = 0$, oder $P(V_{t-1} < 0) > 0$. Im ersten Fall gilt:

$$H_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = V_t - V_{t-1} = V_t,$$

also erfüllt $\xi = H_t$ die Voraussetzungen. Im zweiten Fall setzen wir $\xi := H_t \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}$. Dann ist ξ $\mathscr{F}_{t-1}$-messbar und

$$\xi \cdot (X_t - X_{t-1}) = (V_t - V_{t-1}) \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant -V_{t-1} \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}} \geqslant 0.$$

Die rechte Seite ist positiv mit positiver Wahrscheinlichkeit, also erfüllt auch in diesem Fall das gewählte ξ die Voraussetzungen.

Nun betrachten wir die Rückrichtung. Sei dafür ξ eine $\mathscr{F}_t$-messbare Zufallsvariable, so dass $\xi \cdot \Delta X_t \geqslant$ und $P(\xi \cdot \Delta X_t > 0) > 0$. Wir setzen:

$$H_t = \begin{cases} \xi & \text{für } s = t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu konstruieren wir mit $V_0 = 0$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 1.1 mit

$$V_T = \xi \cdot (X_t - X_{t-1}),$$

eine Arbitrage. □

Es ist interessant, dass sich das Konzept der Arbitrage mit dem wichtigen Konzept der Martingale verbinden lässt, allerdings unter einem geeignet gewählten Maß Q. Wir führen hierzu eine präzise Definition für Martingale ein. Q sei ein Maß auf dem Maßraum $(\Omega, \mathscr{F})$ und wir betrachten nach wie vor die Filtration $\mathbb{F}$ (die wir in der folgenden Definition nicht besonders hervorheben, wohl aber das Maß Q).

Definition 1.7. Ein stochastischer Prozess M heißt *Q-Martingal*, falls gilt:

(i) M ist adaptiert,

(ii) $E_Q[|M_t|] < \infty$ für $t = 0, \ldots, T$,

(iii) $M_s = E_Q[M_t | \mathscr{F}_s]$ für $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Dies führt uns nun zu dem Schlüsselkonzept Martingalmaß. Das ist ein Maß unter dem diskontierte Preisprozesse aller gehandelten Wertpapiere Martingale sind.

Definition 1.8. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ heißt *Martingalmaß*, falls der diskontierte Preisprozess X ein Q-Martingal ist.

Definition 1.9. Das Maß Q heißt *absolut stetig* zu P $(Q \ll P)$ auf $\mathscr{F}_T$, falls

$$P(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(F) = 0 \quad \forall\, F \in \mathscr{F}_T.$$

Die Maße P und Q heißen *äquivalent* $(P \sim Q)$, falls $Q \ll P$ und $P \ll Q$.

Der berühmte Satz von Radon-Nikodym behandelt genau die absolut stetigen Maße. Er sagt aus, dass für zwei absolut stetige Maße stets eine Dichte existiert.

Satz 1.10 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei $Q \ll P$. Dann existiert eine Zufallsvariable $L \geqslant 0$, s.d.*

$$\int \xi dQ = \int \xi L dP \tag{I1}$$

für alle Zufallsvariablen $\xi \geqslant 0$.

Für den Beweis verweisen wir etwa auf Billingsley (1995) (dieser wurde auch in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt). Wir schreiben in diesem Fall kurz $dQ = LdP$ oder für die Dichte $L = \frac{dQ}{dP}$.

Satz 1.11 (Bayes-Theorem)**.** *Sei $Q \ll P$ mit Dichte L. Dann gilt für $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$, dass*

$$E_P[L|\mathscr{F}'] \cdot E_Q[\xi|\mathscr{F}'] = E_P[L \cdot \xi|\mathscr{F}'] \quad P-f.s.$$

Beweis. Wir wählen $F \in \mathscr{F}$

$$\begin{aligned}\int_F E^P[\xi|\mathscr{F}']dP &= \int_F \xi \cdot LdP = \int_F \xi \cdot dQ = \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']dQ = \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}']LdP \\ &= \int_F E^Q[\xi|\mathscr{F}'] \cdot E^P[L|\mathscr{F}']dP. \end{aligned}$$ □

Der diskontierte Preis-Prozess X ist genau dann ein Q-Martingal, falls Integrierbarkeit gilt und für $i = 1, \dots, N$

$$E_Q\Big[\frac{S_t^i}{S_t^0}|\mathscr{F}_s\Big] = \frac{S_s^i}{S_s^0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Die Menge der *äquivalenten Martingalmaße* bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$. Die Menge der $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen X für die $E_P[|X|^p] < \infty$ gilt, bezeichnen wir mit $\mathscr{L}^p(P, \mathscr{F})$. Für $p = \infty$ erhalten wir die Klasse der beschränkten Zufallsvariablen und für $p = 0$ die Klasse der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen. Darüber hinaus bezeichen wir mit $\mathscr{L}_+^0(P, \mathscr{F})$ die Menge der positiven $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen.

Satz 1.12. *Sei $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Q ist Martingalmaß.

(ii) Für jede beschränkte, selbstfininanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q-Martingal.

(iii) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $E_Q[(V_T^{\bar{H}})^-] < \infty$ ist $V^{\bar{H}}$ ein Q-Martingal.

(iv) Für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $V = V^{\bar{H}} \geqslant 0$ gilt

$$V_0 = E_Q[V_T].$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\bar{H}$ selbstfinanzierend mit $|H_t^i| \leqslant c$, für $i = 0, \ldots, d$, $t = 0, \ldots, T$. Dann folgt, dass

$$|V_t| \leqslant |V_0| + \sum_{k=1}^{t} c \cdot \sum_{i=1}^{d} \Big(|X_k^i| + |X_{k-1}^i| \Big),$$

so dass mit $V_t \in \mathscr{L}^1(Q)$ für $t \in \mathbb{T}$ folgt. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] &= E_Q[V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= V_{t-1} + \bar{H}_t \cdot (E_Q[\bar{X}_t|\mathscr{F}_{t-1}] - \bar{X}_{t-1}) = V_{t-1}. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Wir zeigen zunächst: Aus $E_Q[V_t^-] < \infty$ folgt $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$, auch wenn diese Erwartungswerte ∞ annehmen können. Sei dazu $a > 0$, $\bar{H}$ selbstfinanzierend und $H_t^a := H_t 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}$.

$$\begin{aligned} E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] 1_{\{|H_t| \leqslant a\}} &= E_Q[\bar{H}_t \cdot \bar{X}_t 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= E_Q[\bar{H}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}|\mathscr{F}_{t-1}] + V_{t-1} 1_{\{|H_t| \leqslant a\}} = V_{t-1} 1_{\{|H_t| \leqslant a\}}. \end{aligned}$$

Mit $a \uparrow \infty$ folgt also $E_Q[V_t|\mathscr{F}_{t-1}] = V_{t-1}$. Nun zeigen wir noch, dass $E_Q[V_t^-] < \infty$ für alle t gilt, denn

$$E_Q[V_{T-1}^-] = E_Q[E_Q[V_T|\mathscr{F}_{T-1}]^-] \leqslant E_Q[E_Q[V_T^-|\mathscr{F}_{T-1}]] = E_Q[V_T^-] < \infty$$

und es folgt $E_Q[V_t^-] < \infty$ für alle $0 \leq t \leq T$ und somit V ist unter Q ein F_t-Martingal.
iii) $\Rightarrow$ iv): Klar.
iv) $\Rightarrow$ i): Zuerst zeigen wir die Integrierbarkeit von X_t^i. Wir betrachten die selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H)$, gegeben durch

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s \leq t\}}$$

und $H_s^j = 0$ für $s > 0$ und $j = i$ sowie für alle $s \in \mathbb{T}$ und $j \neq i$. Wir starten mit dem Anfangskapital $V_0 = X_0^i$ und erhalten, dass

$$V_T = X_t^i \geqslant 0.$$

Diese Handelsstrategie erfüllt also die Voraussetzung für (iv), so dass

$$X_0^i = V_0 = E_Q[V_T] = E_Q[X_t^i] = E_Q[|X_t^i|] < \infty, \tag{I2}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $\infty > V_0 = E_Q[|X_t^i|]$ folgt. Wir zeigen als nächstes, dass

$$E_Q[X_{t+1}^i 1_F] = E_Q[X_t^i 1_F] \qquad \forall F \in \mathscr{F}_t.$$

Dazu wählen wir

$$H_s^i = \mathbb{1}_{\{s<t\}} + \mathbb{1}_{F^C} 1_{\{s=t\}},$$

$H^j = 0$ für $j \neq i$ und konstruieren mit $V_0 = X_0^i$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ nach Bemerkung 1.1. Wir erhalten für den Endwert dieser Handelsstrategie, dass

$$V_T = \mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i \geq 0,$$

so dass ebenfalls die Voraussetzungen für (iv) erfüllt sind. Daraus folgt, dass

$$X_0^i = E_Q[V_T] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i].$$

Zusammen mit Gleichung (I2) erhalten wir

$$E_Q[X_t^i] = E_Q[\mathbb{1}_F X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{F^C} X_t^i],$$

also $E_Q[1_F X_t^i] = E_Q[1_F X_{t+1}^i]$, und die Behauptung folgt. □

2 Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung

Der folgende Satz ist der wichtigste Satz unserer Vorlesung. Wir nennen ihn den Hauptsatz der Wertpapierbewertung (Fundamental Theorem of Asset Pricing, FTAP).

Theorem 2.1. *Ein Markt ist genau dann frei von Arbitrage, falls ein äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Fall existiert ein $Q^* \in \mathcal{M}$ mit beschränkter Dichte $\frac{dQ^*}{dP}$.*

Wir beweisen den Hauptsatz in mehreren Schritten. Die Rückrichtung stellt sich als überraschend leicht heraus. Sie ist auch die in der Anwendung am meisten verwendete Anwendung des Satzes.

Satz 2.2. *Ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$, so ist der Markt frei von Arbitrage.*

Beweis. Wir verwenden Satz 1.12 (iii) und zeigen einen Widerspruch. Sei hierzu H eine Arbitrage mit diskontiertem Wertprozess V. Dann ist $V_0 \leqslant 0$ P-f.s., also auch $V_0 \leqslant 0$ Q-f.s. für alle $Q \in \mathcal{M}$ und ebenso $V_T \geq 0$ Q-f.s. Wir wählen ein solches Q. Weiterhin ist $P(V_T > 0) > 0$, also auch $Q(V_T > 0) > 0$. Es folgt $E_Q[V_T^-] = 0 < \infty$. Mit Satz 1.12 (iii) erhalten wir, dass V ein Q-Martingal ist, also

$$V_0 = E_Q[V_T] > 0,$$

ein Widerspruch zu $V_0 \leqslant 0$. □

Remark 2.1 (Die L^p-Räume)**.** Zufallsvariablen unter Momentenbedingungen führen zu den L^p-Klassen von messbaren Abbildungen, die in der Funktionalanalysis eine wichtige Rolle spielen, siehe etwas Werner (2000). Wir unterschieden die Abbildungen selbst ($\mathscr{L}^p$-Räume) von ihren Äquivalenzklassen (L^p-Räume). Wir beginnen mit den Abbildungen. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definieren wir den Raum der $\mathscr{F}$-messbaren Abbildungen (also aller Zufallsvariablen) mit Werten in $\mathbb{R}^d$ durch $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^d)$. Wenn je nach Kontext einige der Argumente klar sind, lassen wir dementsprechend diese weg und schreiben etwa $\mathscr{L}^0$. Mit $\mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^0$ definieren wir diejenige Teilmenge von Zufallsvariablen mit p-ten Momenten, wo also $\|Z\|_p < \infty$, mit

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[|Z|^p]^{1/p} & \text{für } 0 < p < \infty \\ \inf\{c > 0 : P(|Z| > c) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Entsprechend definieren wir für $p \in [0, \infty]$ den Raum L^p als die zugehörigen Äquivalenzklassen definiert durch

$$Z \sim Z' \qquad \Leftrightarrow P(Z = Z') = 1.$$

Wir kehren zurück zum Beweis des Hauptsatzes. Nach Satz 1.6 reicht es, Arbitrage in jeder Periode zu untersuchen. Wir fixieren ein $t \in \mathcal{T}$ und definieren:

$$K = \{H \cdot \Delta X_t : \ H \in L^0(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)\}.$$

Dann können wir No-Arbitrage auch äquivalent ausdrücken durch

$$K \cap L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Da t fixiert ist, schreiben wir im Folgenden kurz $L^0_+(\mathscr{F}_t, P, \mathbb{R}) = L^0_+$. Für zwei Mengen A und B bezeichen wir mit

$$A + B = \{a + b| \ a \in A, \ b \in B\}$$

die direkte Summe dieser Mengen und analog mit $A - B$ die direkte Differenz.

Satz 2.3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $K \cap L^0_+ = \{0\}$,

(ii) $(K - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$,

(iii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß mit beschränkter Dichte,

(iv) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis. Wir zeigen (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (iii) $\Rightarrow$ (iv), der Teil (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist der Hauptteil des Beweises und wird im Anschluss studiert.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $Q \in \mathcal{M}$. Wir zeigen wieder einen Widerspruch. Dazu sei $H \geq 0$ P-fast sicher eine $\mathscr{F}_{t-1}$-messbare, d-dimensionale Zufallsvariable, so dass $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant 0$ und $P(H \cdot (X_t - X_{t-1})) > 0$. Dann ist ebenso $Q(H \cdot (X_t - X_{t-1})) > 0$. Für jedes $c > 0$ setzen wir $H^c := H1_{\{|H| \leqslant c\}}$. Wegen der σ-Stetigkeit gibt es ein c^*, so dass $Q(H^{c^*}(X_t - X_{t-1}) > 0) > 0$. Wäre nun $H^{c^*} \cdot (X_t - X_{t-1}) \in K \cap \mathscr{L}^0_+ \backslash \{0\}$, so folgte, dass

$$E^Q[H^{c^*} \cdot (X_t - X_{t-1}) | \mathscr{F}_{t-1}] = H^{c^*} E^Q[X_t - X_{t-1} | \mathscr{F}_{t-1}] = 0,$$

was allerdings Widerspruch zu $H^{c^*}(X_t - X_{t-1}) \gneqq 0$ ist, so dass wir die Aussage (i) erhalten.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir betrachten ein $Z \in (K - \mathscr{L}^0_+) \cap \mathscr{L}^0_+$. Dann existiert ein $\mathscr{F}_{t-1}$-messbares H und $U \in \mathscr{L}^0_+$, s.d.

$$Z = H \cdot (X_t - X_{t-1}) - U \geqslant 0.$$

Es gilt also $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \geqslant U \geqslant 0$, und somit $H \cdot (X_t - X_{t-1}) \in \mathcal{K} \cap \mathscr{L}^0_+$. Nach (i) folgt $H \cdot (X_t - X_{t-1}) = 0$, also $U = 0$ und somit $Z = 0$.

Die weiteren Aussagen (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgen unmittelbar. $\square$

Wir zeigen nun, dass es genügt, sich auf integrierbare Zufallsvariablen X_t und X_{t+1} zu konzentrieren.

Lemma 2.4. *Für den Schritt (ii) ⇒ (iii) reicht es $E[|X_t|] < \infty$, $E[|X_{t-1}|] < \infty$ zu betrachten.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst $\tilde{P} \sim P$, so dass die Erwartungswerte existieren. Sei dazu $c > 0$ und

$$Z := \frac{c}{1 + |X_t| + |X_{t-1}|} \leqslant c$$

eine positive Dichte und $d\tilde{P} = ZdP$. Offensichtlich ist $\tilde{E}[|X_t|] < \infty$ und $\tilde{E}[|X_{t-1}|] < \infty$. Die Bedingung (ii) hängt nur von den Nullmengen von P ab, also gilt (ii) genau dann, wenn es für $\tilde{P}$ gilt. Ist $Q^* \in \mathcal{M}$, so ist

$$\frac{dQ^*}{dP} = \frac{dQ^*}{d\tilde{P}} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{dQ^*}{d\tilde{P}} \cdot Z.$$

Die Dichte von Q^* bezüglich P ist demnach genau dann beschränkt, wenn sie es bezüglich $\tilde{P}$ ist. □

Im Folgenden können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $E|X_t| < \infty$ und $E|X_{t-1}| < \infty$ ausgehen.

Wir werden im Folgenden Erwartungswerte für eine Klasse von Zufallsvariablen betrachten, z.B. bedingte Erwartungen. Wir definieren den konvexen Kegel

$$C = (K - L^0_+) \cap L^1.$$

Lemma 2.5. *Sei $c \geqslant 0$ und $Z \in L^\infty(P, \mathscr{F}_t)$, so dass*

$$E[ZW] \leqslant c \qquad \text{für alle } W \in C. \tag{I3}$$

Dann gilt:

(i) $E[ZW] \leqslant 0$ für alle $W \in C$,

(ii) $Z \geqslant 0$ P-f.s.,

(iii) Ist $P(Z > 0) > 0$, so ist durch

$$\frac{dQ}{dP} := Z$$

ein Martingalmaß (und $Q \ll P$) definiert.

Beweis. (i) C ist ein Kegel, denn mit $W \in C$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha W \in C$. Dann ist

$$E[\alpha ZW] = \alpha \cdot E[ZW] \leqslant \alpha c.$$

Wir erhalten, dass diese Gleichung bereits für $c = 0$ gelten muss.

(ii) Wir wählen $W = -\mathbb{1}_{\{Z<0\}}$. Dann ist

$$E[Z_-] = E[ZW] \leqslant 0,$$

also $Z_- = 0$ und somit $Z \geq 0$ P-f.s.

(iii) Wir wählen H in $L^\infty(P, \mathscr{F}_{t-1}, \mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und setzen $Y = (X_t - X_{t-1}) \in C$. Dann ist

$$E[ZHY] \leqslant c \quad \text{und} \quad E[\alpha ZHY] \leqslant c,$$

so dass wie oben $E[ZHY] \leqslant 0$ folgt. Außerdem ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha E[ZHY] \leqslant 0,$$

also $E[ZHY] = 0 = E[H(X_t - X_{t-1})]$. Wir erhalten $E^Q[1_F(X_t^i - X_{t-1}^i)] = 0$ für alle $F \in \mathscr{F}_{t-1}$, also ist X Q-Martingal. □

2.1 Exkurs: Hahn-Banach auf lokal konvexen Raumen

Definition 2.6. Ein *topologischer Vektorraum* ist ein Vektorraum E, so dass gilt:

(i) die Addition ist stetig,
(ii) die Skalarmultiplikation ist stetig.

Wir nennen einen topologischer Vektorraum E *lokal konvexen Raum*, falls seine Topologie von einer Basis aus konvexen Mengen erzeugt wird. Für weitere Informationen hierzu sei auf Werner (2000) verwiesen.

Theorem 2.7 (Hahn-Banach)**.** *Seien B und C nicht-leere Teilmengen des lokal konvexen Raumes E und*

(i) $B \cap C = \emptyset$,
(ii) B, C konvex,
(iii) B kompakt, C abgeschlossen.

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{R}$, so dass

$$\sup_{x \in C} \ell(x) < \inf_{x \in B} \ell(x).$$

Nach Lemma 2.5 reduziert sich der Beweis auf Konstruktion eines Elemments von

$$\mathcal{Z} := \{Z \in L^\infty,\ 0 \leqslant Z \leqslant 1,\ P(Z > 0) > 0,\ E[ZW] \leqslant 0\ \forall W \in C\}$$

mit dem konvexen Kegel $C = (K - L^0_+) \cap L^1$.

Lemma 2.8. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1, und $C \cap L^1_+ = \{0\}$. Dann existiert für alle $F \in L^1_+ \backslash \{0\}$ ein $Z \in \mathcal{Z}$, s.d. $E[FZ] > 0$.*

Beweis. Sei $B = \{F\}$, s.d. $B \cap C = \emptyset$, $C \neq \emptyset$, beide Mengen sind konvex, B ist kompakt und C abgeschlossen nach Voraussetzung.
„$\Longrightarrow$“: Mit dem Satz von Hahn-Banach existiert ein stetiges lineares Funktional ℓ, s.d.

$$\sup_{W \in C} \ell(W) < \ell(F)$$

Der Dualraum L^1 kann mit L^∞ identifiziert werden, s.d. $Z \in L^\infty$ existiert mit

$$\ell(F') = E[Z \cdot F'], \qquad F' \in L^1.$$

O.B.d.A. $\|Z\|_\infty = 1$. Es folgt $E[ZW] < E[ZF]$ $\forall W \in C$, so dass Z die Voraussetzungen von Lemma 2.5 erfüllt. Es folgt, dass $Z \in \mathcal{Z}$. Mit $0 = W \in C$ erhalten wir $E[FZ] > 0$. □

Remark 2.2. Der Erwartungswert ist ein lineares Funktional. In der Statistik betrachtet man auch den Best linear unbiased Estimator (BLUE). (Best: Der Schätzer hat die kleinste Varianz, Linear: Das Modell ist linear, Unbiased: unverzerrt, Estimator: Schätzer).

Der nächste Schritt ist es, ein $Z^* > 0$ auszuwählen.

Lemma 2.9. *Angenommen C ist abgeschlossen in L^1 und*

$$C \cap L^1_+ = \{0\}.$$

Dann existiert $Z^* \in \mathcal{Z}$ mit $Z^* > 0$ P-f.s.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{Z}$ abzählbar konvex ist: Das heisst für alle $\alpha_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = 1$, und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$, gilt, dass

$$Z := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k Z_k \in \mathcal{Z}.$$

Dies sieht man wie folgt: Für $W \in C$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k Z_k W| \leqslant |W| \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k| = |W| \in L^1.$$

Mit dominierter Konvergenz erhalten wir

$$E[ZW] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k E[Z_k W] \leqslant 0$$

und somit ist $Z \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}$ ist in der Tat abzählbar konvex. Setze

$$c := \sup\{P(Z > 0) : \ Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Wir wählen eine Folge $(Z_n) \in \mathcal{Z}$, so dass $P(Z_n > 0) \to c$. Dann ist

$$Z^* := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Z_k \in \mathcal{Z}$$

nach der obigen Beobachtung. Darüber hinaus ist $\{Z^* > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k > 0\}$, also

$$P(Z^* > 0) \geqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} P(Z_k > 0) = c.$$

Wir zeigen die Behauptung mit einem Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass $P(Z^* = 0) > 0$. Dann ist $F := 1_{\{Z^*=0\}} \neq 0$ und $F \in L^1_+$. Nach Lemma 2.8 gibt es $Z' \in \mathcal{Z}$, s.d.

$$0 < E[FZ'] = E[1_{\{Z^*=0\}} Z'].$$

also $P(\{Z' > 0\} \cap \{Z^* = 0\}) > 0$. Dann ist

$$P\Big(\frac{1}{2}(Z' + Z^*) > 0\Big) > P(Z^* > 0)$$

ein Widerspruch zur Maximalität von Z^* und es folgt in der Tat $P(Z^* > 0) = 1$. □

Das folgende Lemma erlaubt uns aus einer Folge eine messbare und konvergente *Teilfolge* auszuwählen.

Lemma 2.10. *Sei (H_n) eine Folge von d-dim. Zufallsvariablen mit $\liminf_n |H_n| < \infty$. Dann gibt es $H \in L^0(\mathbb{R}^d)$ und eine strikt monoton wachsende Folge (σ_m) von ganzzahligen Zufallsvariablen, so dass*

$$H_{\sigma_m(\omega)}(\omega) \to H(\omega)$$

für P-fast alle ω.

Beweis. Sei $\lambda := \liminf_n |H_n|$ und $\sigma_m = m$ auf $\{\lambda = \infty\}$. Auf $\{\lambda < \infty\}$ definieren wir $\sigma_1^0 := 1$ und

$$\sigma_m^0 := \inf\{n > \sigma_{m-1}^0 : \ ||H_n| - \lambda| \leqslant \frac{1}{m}\} \qquad m = 2, 3, \ldots$$

Sei $H^i := \liminf_{m\to\infty} H^i_{\sigma^{i-1}_m}$ $i = 1, \dots, d$. Sei $\sigma^i_1 = 1$ und

$$\sigma^i_m(\omega) := \inf\{\sigma^{i-1}_n(\omega) : \ \sigma^{i-1}_n(\omega) > \sigma^i_{m-1}(\omega) \quad \text{und} \quad |H_{\sigma^{i-1}_n} - H^i(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}\}$$

$\sigma_m := \sigma^d_m$ gibt die gesuchte Folge. □

Eigentlich wären wir schon fast am Ziel unsere Beweises angelangt, allerdings können zwei verschieden Portfolien zu dem gleichen Endwert führen, oder: anders formuliert, es könnte sein, dass

$$H(X_t - X_{t-1}) = 0$$

gilt obwohl $H \neq 0$. Dieses Problem überwinden wir mit der folgenden Technik.

Lemma 2.11. *Wir definieren:* [1]

$$N = \{H \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ H(X_t - X_{t-1}) = 0 \quad P - f.s.\}$$
$$N^\perp = \{G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d) : \ G \cdot H = 0 \text{ für alle } H \in N\}$$

Dann gilt

(i) $N, N^\perp$ *sind abgeschlossen in* L^0, *und* $gH \in N$, *falls* $H \in N$, $g \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P, \mathbb{R})$, *sowie* $gG \in N^\perp$ *falls* $G \in N^\perp$, $g \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P, \mathbb{R})$.

(ii) $N \cap N^\perp = \{0\}$.

(iii) Jedes $G \in L^0(\Omega, \mathscr{F}_{t-1}, P, \mathbb{R}^d)$ *hat die eindeutige Zerlegung:*

$$G = H + G^\perp, \quad H \in N, \ G^\perp \in N^\perp.$$

Beweis. (i) Gilt $H_n \xrightarrow{P} H$, so gibt es eine f.s. konvergiernde Teilfolge (H_{σ_m}). Dann gilt:

$$H_{\sigma_m}(\omega) \cdot (X_t(\omega) - X_{t-1})(\omega) \to H(\omega)(X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)) \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega.$$

also $(H_n) \subseteq N$ mit $H_n \to^{f.s.} H \Longrightarrow H \in N$ und $(G_k) \subseteq N^\perp$ mit $G_n \to^{f.s.} G. \Longrightarrow G \in N^\perp$. Ebenso folgt leicht $gH \in N$ und $gG \in N^\perp$.

(ii) Angenommen $G \in N \cap N^\perp$, dann folgt:

$$0 = G \cdot G = |G| \Leftrightarrow G = 0 \quad P\text{-f.s.}.$$

Dies ist ein Widerspruch.

(iii) Für $\xi \in \mathbb{R}^d \implies \xi = \xi^1 e_1 + \ldots + \xi^d e_d$ mit Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Nehmen wir zunächst an, dass $e_i = n_i + e_i^\perp$ $n \in N$, $e_i^\perp \in N^\perp$. Dann ist:

$$\xi = \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi n_i}_{\in N} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \xi_i e_i^\perp}_{\in N^\perp}$$

Die Zerlegung ist eindeutig, da $N \cap N^\perp = \{0\}$.
Wir zeigen noch $e_i = n_i + e_i^\perp$. Dazu betrachten wir $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P, \mathbb{R}^d)$ mit Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = E[XY]$. Sowohl $N \cap H$ als auch $N^\perp \cap H$ sind abgeschlossene Unterräume von H. Wir definieren eine Projektion

$$\Pi^0 : H \to N \cap H, \quad \Pi^\perp : H \to N^\perp \cap H$$

und setzen $n_i = \Pi^0(e_i)$, $e_i^\perp = \Pi^\perp(e_i)$. Wir betrachten $\xi_i = e_i - \Pi^0(e_i) \in N^\perp$.
Angenommen, $\xi \notin N^\perp \cap H$. Dann gibt es ein $H \in N$ mit $P(\xi \cdot H > 0) > 0$ und wir betrachten:

$$\tilde{e} := H \mathbb{1}_{\{\xi \cdot H > 0 \ | \ |H| \leqslant 0\}} \in N \cap H$$

$H \cdot Y = 0 \implies \tilde{H} \cdot Y = 0$ P-f.s.. Ist c groß genug, so gilt

$$0 < E[\tilde{H} \cdot \xi] = \langle \tilde{H}, \xi \rangle,$$

ein Widerspruch dazu, dass $(\xi - \Pi(e_i)) \perp N$.

□

B 1.2 *Beispiel einer Folge in C:* Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}_1 =$ Borel-σ-Algebra, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\Delta X(\omega) = \omega$ (dies ist offensichtlich ein Markt mit Arbitrage).
C ist eine echte Teilmenge von L^1: Ist $F \geqslant 1$, so ist F nicht aus C! Wir betrachten

$$F_n = (F^+ \cap n) \mathbb{1}_{[1/n, 1]} - F^- \quad \text{für } F \in L^1$$

und somit gilt $F_n \xrightarrow{L^1} F$. Weiterhin ist $F_n \in C$, da

$$(F^+ \wedge n) \mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant \begin{cases} n & \omega \in [1/n, 1], \\ 0 & \omega \in [0, 1, n). \end{cases}$$

und somit $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} \leqslant n \cdot n\Delta X = n^2 \Delta X$. $\Delta X \geqslant 1/n \iff n\Delta X \geqslant 1$ auf $\omega \geqslant 1/n$, also $(F^+ \wedge n)\mathbb{1}_{[1/n,1]} = U + n^2 \Delta X$ mit $n \geqslant 0$.

Lemma 2.12. *Gilt $K \cap L^0_+ = \{0\}$, so ist $K - L^0_+$ abgeschlossen in L^0.*

Beweis. Sei $W_n \in K - L^0_+$, so dass $W_n \to W$ in L^0 (also in Wahrscheinlichkeit). Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. annehmen, dass $W_n \to W$ f.s. Es gilt

$$W_n = \tilde{H}_n \cdot \Delta X - U_n \overset{L.2.11}{=} (\tilde{H}_n \Delta X + H_n^\perp \Delta X) = H_n^\perp \Delta X - U_n.$$

Zunächst nehmen wir an, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s. Nach Lemma 2.10 gilt dass $H_{\sigma_n} \to H$ P-f.s. für eine monoton wachsende Folge (σ_n). Ebenso ist:

$$0 \leqslant U_{\sigma_n} = H_{\sigma_n} \Delta X - W_{\sigma_n} \to H \Delta X - W =: U \qquad P - \text{f.s.}$$

mit $U \geqslant 0$, also $W \in K - L^0_+$. $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$, also normiert (Handelsstrategie die explizit ist).

Wir zeigen noch, dass $\liminf |H_n| < \infty$ P-f.s.. Setze $A = \{\omega \in \Omega \ : \ \liminf |H_n| = \infty\}$. Lemma 2.10 angewendet auf $\xi_n = \frac{H_n}{|H_n|}$ liefert eine Teilfolge (τ_n), so dass $\xi_{\tau_n} \to \xi$ P-f.s.. Nun gilt:

$$0 \leqslant \mathbb{1}_A \frac{U_{\tau_n}}{|H_n|} = \mathbb{1}_A (\frac{H_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|}) \cdot \Delta X - \frac{W_{\tau_n}}{|H_{\tau_n}|} \to \mathbb{1}_a \xi \Delta X \quad P - \text{f.s.}.$$

(Handelsstrategie, die $\geqslant 0$ ist). Die Annahme (NA) impliziert $\mathbb{1}_A \xi \Delta(X) = 0$. Wir zeigen, $\mathbb{1}_A \xi \in N^\perp$, so dass $\xi = 0$ und damit $P(A) = 0$ folgt. (wegen $|\xi| = 1$). Für $\eta \in N$ gilt, dass

$$\xi_{\tau_n} \cdot \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n = k\}} \frac{1}{|H_k|} \underbrace{H_k}_{\in N^\perp} \cdot \Delta X = 0.$$

also $\xi_{\tau_n} \in N^\perp$. Da $N^\perp$ abgeschlossen, folgt $\xi \in N^\perp$. □

Literaturverzeichnis

Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure*, 3 edn, Wiley.

Föllmer, H. and Schied, A. (2011), *Stochastic Finance*, Walter de Gruyter, Berlin.

Werner, D. (2000), *Funktionalanalysis*, Springer.