UNI FREIBURG

Stochastik Teil 2 SS 2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 8

Abgabe: 09.05.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Die Gammaverteilung $\Gamma(a,\lambda)$ ist eine Verteilung auf $\mathbb{R}^+$ mit Dichte

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x},$$

wobei $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$. Weiterhin ist die Betafunktion $B(a,b)$ für $a, b > 0$ definiert als $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Es sei X exponentialverteilt mit Intensität λ. Zeigen Sie, dass für $x, h > 0$

$$\mathbb{P}(X > x + h | X > x) = \mathbb{P}(X > h)$$

gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Es sei X gammaverteilt zu den Parametern a, λ. Zeigen Sie, dass für $s < \lambda$

$$\Psi_X(s) := \mathbb{E}\left(e^{sX}\right) = \frac{\lambda^a}{(\lambda - s)^a}$$

gilt. Bestimmen Sie mit Hilfe der momentenerzeugenden Funktion Ψ_X den Erwartungswert und die Varianz.
Hinweis: Betrachten Sie die Potenzreihendarstellung von Ψ_X.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien $X \sim \Gamma(a,\lambda), Y \sim \Gamma(b,\lambda)$ unabhängig und $c > 0$. Zeigen Sie

(a) $X + Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$,

(b) $cX \sim \Gamma\left(a, \frac{\lambda}{c}\right)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es sei $\Lambda \sim \Gamma(k,\lambda)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und, gegeben Λ seien $X_1, ..., X_n \sim \text{Poi}(\Lambda)$ unabhängig. Berechnen Sie die Verteilung von Λ gegeben $X_1, ..., X_n$.