UNI FREIBURG

Stochastik Teil 2 — SS 2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 13

Abgabe: 24.07.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben seien i.i.d. Gamma-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ mit der Dichte

$$p_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$$

und Parametern $a > 0$ und $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie für ein positives $n \in \mathbb{N}$

$$EX_i^n = \frac{a \cdot \ldots \cdot (n+a-1)}{\lambda^n}.$$

Dabei können Sie die Identität $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, verwenden.

(b) Berechnen Sie einen Momentenschätzer für die Parameter a und λ basierend auf der Beobachtung von $(X_1, \ldots, X_m)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \sqrt{\frac{2\theta^3}{\pi}} x^2 e^{-\frac{\theta}{2}x^2} 1_{\mathbb{R}>0}(x)$$

wobei der Parameter $\theta > 0$ unbekannt ist. Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ und klären Sie, ob dieser eindeutig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. und Beta$(\theta + 1, 1)$-verteilt mit dem Parameter $\theta \in \Theta = \{\eta \in \mathbb{R} : \eta > -1\}$. Die Dichte von X_i ist also

$$p_\theta(x) = (\theta + 1) x^\theta 1_{[0,1]}(x).$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf der Beobachtung von $(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie dabei, dass der von Ihnen gefundene Schätzer $\hat{\theta}$ das Maximum der Likelihood-Funktion ist.

(b) Kann der Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ auf dem Rand des Parameterraumes liegen?

Aufgabe 4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. und Paretoverteilt mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} 1_{\mathbb{R}_{>a}}(x),$$

wobei $\theta > 0$ und a fix und bekannt sei.

(a) Finden Sie eine reellwertige suffiziente Statistik $T(X_1, \ldots, X_n)$ für θ.

(b) Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für θ.

(c) Zeigen Sie, dass der von Ihnen gefundene Schätzer $\hat{\theta}$ suffizient ist.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Sei $\{p_\theta : \theta \in \Theta\}$ ein reguläres statistisches Modell und $T(X)$ eine suffiziente Statistik für θ. Weisen Sie nach, dass ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ eine Funktion von $T(X)$ ist.