Stochastik Teil 2

SS 2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 12

Abgabe: 10.07.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben seien i.i.d. Gamma-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_m$ mit der Dichte

$$p_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x)$$

und Parametern $a > 0$ und $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie für ein positives $n \in \mathbb{N}$

$$EX_i^n = \frac{a \cdot \ldots \cdot (n + a - 1)}{\lambda^n}.$$

Dabei können Sie die Identität $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, verwenden.

(b) Berechnen Sie einen Momentenschätzer für die Parameter a und λ basierend auf der Beobachtung von $(X_1, \dots, X_m)$.

Proof. (a)

$$\begin{aligned}
EX^n &= \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{a \cdot \ldots \cdot (a + n - 1)}{\lambda^n} \int_0^\infty \frac{\lambda^{a+n}}{\Gamma(n+a)} x^{a+n-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{a \cdot \ldots \cdot (a + n - 1)}{\lambda^n} \\
&= \frac{\Gamma(a + n)}{\lambda^n \Gamma(a)}.
\end{aligned}$$

(b) Die Momentenschätzer für die Parameter a und λ sind

$$\begin{aligned}
EX &= \frac{a}{\lambda}, \\
EX^2 &= \frac{a(a+1)}{\lambda^2}, \\
\Longrightarrow \quad EX^2 &= \frac{a(a+1)}{a^2} (EX)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad EX^2 &= \left(1 + \frac{1}{a}\right) (EX)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad a &= \frac{(EX)^2}{EX^2 - (EX)^2}, \\
\lambda &= \frac{EX}{EX^2 - (EX)^2}.
\end{aligned}$$

Die Schätzer für die Parameter a, λ erhält man nun durch obige Gleichungen indem man bekanntlich die Momenete mit den Daten gleichsetzt: $m_1 \overset{!}{=} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ und $m_2 \overset{!}{=} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i^2$. □

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \sqrt{\frac{2\theta^3}{\pi}} x^2 e^{-\frac{\theta}{2}x^2} 1_{\mathbb{R}>0}(x)$$

wobei der Parameter $\theta > 0$ unbekannt ist. Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ und klären Sie, ob dieser eindeutig ist.

Proof. Wir berechnen den MLS für die oben angegebene Familie von Verteilungen indem wir die Log-Likelihood-Funktion maximieren.
Die Likelihood-Funktion der Familie ist gegeben durch

$$L(\theta, x) = \left(\frac{2\theta^3}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n x_i^2 \exp\left(-\frac{\theta}{2}x_i^2\right).$$

Für die Log-Likelihood-Funktion gilt

$$l(\theta, x) = \frac{n}{2}(\log 2 + 3\log\theta - \log\pi) + 2\sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, x) = \frac{3n}{2\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, x) = -\frac{3n}{2}\frac{1}{\theta^2} < 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Somit ergibt sich die Formel für den MLS

$$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, x) = \frac{3n}{2\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{3}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, x) < 0$ ist der MLS $\hat{\theta}$ auch eindeutig. □

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. und Beta$(\theta + 1, 1)$-verteilt mit dem Parameter $\theta \in \Theta = \{\eta \in \mathbb{R} : \eta > -1\}$. Die Dichte von X_i ist also

$$p_\theta(x) = (\theta + 1)x^\theta 1_{[0,1]}(x).$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf der Beobachtung von $(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie dabei, dass der von Ihnen gefundene Schätzer $\hat{\theta}$ das Maximum der Likelihood-Funktion ist.

(b) Kann der Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\theta}\,(x_1, \ldots, x_n)$ auf dem Rand des Parameterraumes liegen?

Proof. (a) Die Likelihoodfunktion für eine Beobachtung $(X_1, \ldots, X_n)$ ist

$$\begin{aligned}
L(\theta, X) &= (\theta + 1)^n \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^\theta \\
l(\theta, X) &= n\log(\theta + 1) + \theta\sum_{i=1}^n \log X_i \\
\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, X) &= \frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \log X_i \\
\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, X) &= -\frac{n}{(\theta + 1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, X) = 0$ liefert

$$\hat\theta = -1 - \frac{n}{\sum_i \log X_i}.$$

$\hat\theta$ ist eindeutiger MLS.

(b) Nein, denn Θ offen ist.

□

Aufgabe 4. Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. und Paretoverteilt mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} 1_{\mathbb{R}_{>a}}(x),$$

wobei $\theta > 0$ und a fix und bekannt sei.

(a) Finden Sie eine reellwertige suffiziente Statistik $T(X_1, \dots, X_n)$ für θ.
(b) Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta(X_1, \dots, X_n)$ für θ.
(c) Zeigen Sie, dass der von Ihnen gefundene Schätzer $\hat\theta$ suffizient ist.

Proof. (a) Die suffiziente Statistik $T = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ erhalten wir aus

$$p_\theta(X_1, \dots, X_n) = \theta^n a^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{\theta+1} \prod_{i=1}^n 1_{\mathbb{R}_{>a}}(x_i)$$

mit Hilfe des Faktorisierungssatzes.

(b) Die Berechnung folgt der üblichen Prozedur des Minimierens der Log-Likelihood-Funktion.

$$\begin{aligned} l(x,a,\theta) &= n\log\theta + n\theta\log a - (\theta+1)\sum_{i=1}^n \log x_i \\ \frac{\partial}{\partial\theta} l(x,a,\theta) &= \frac{n}{\theta} + n\log a - \sum_{i=1}^n \log x_i \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(x,a,\theta) &= -\frac{n}{\theta^2} < 0 \\ \hat\theta &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\log x_i - \log a)} = \frac{n}{\log\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{a}\right)} \end{aligned}$$

(c) Die suffiziente Statistik $T = \eta(\hat\theta)$ ist eine Funktion des MLS, wobei

$$\eta(x) = \frac{1}{\exp\left(\frac{n}{x}\right) a^n}. \tag{1}$$

Daher ist der MLS $\hat\theta$ auch suffizient.

□

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Sei $\{p_\theta : \theta \in \Theta\}$ ein reguläres statistisches Modell und $T(X)$ eine suffiziente Statistik für θ. Weisen Sie nach, dass ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ eine Funktion von $T(X)$ ist.

Proof. Es sei $\hat\theta$ ein MLS für θ in einem regulären Model $(p_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Dann maximiert $\hat\theta$ die Likelihood-Funktion $L(\theta, x) = p_\theta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nach Voraussetzung. Da die Statistik T suffizient ist, gilt mit Hilfe des Faktorisierungssatzes

$$L_\theta(x) = p_\theta(x) = g(T(x), \theta)\, h(x).$$

Wir stellen weiterhin fest, dass die Liklihood Funktion nicht negativ ist und dass h nicht negativ gewählt werden kann. Das bedeutet daher, dass es genügt $\tilde L_\theta(x) := g(T(x), \theta)$ zu betrachten. $\tilde L_\theta$ hängt von $(x_1, \dots, x_n)$ nur über $T(x)$ ab, d.h. $\hat\theta$ kann als diejenige Funktion verstanden werden, die für jede Realisierung $T(x)$ die Funktion $\tilde L_\theta$ maximiert. Also ist $\hat\theta$ eine Funktion von T. □