UNI FREIBURG

Stochastik Teil 2 — SS 2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 12

Abgabe: 10.07.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Beta-Verteilung als exponentielle Familie. Sei X eine Beta-verteilte Zufallsvariable mit der Dichte

$$p_{a,b} = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{[0,1]}(x)$$

und den Parametern $a > 0$ und $b > 0$. Zeigen Sie, dass $p_{(a,b)}$ zu einer zweiparametrigen exponentiellen Familie gehört.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Die Dichte der Lévy-Verteilung mit den Parametern $(\mu, \sigma) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ ist

$$p_{(\mu,\sigma)}(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}(x-\mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) 1_{\mathbb{R}_{\geq\mu}}(x).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma})$ normalverteilt mit $\sigma > 0$. Die Zufallsvariable $\frac{1}{X^2}$ ist Lévy-verteilt mit den Parametern $(0, \sigma)$.
2. Wenn $\mu = 0$ festgehalten wird, ist die Familie $(p_{(0,\sigma)})_{\sigma>0}$ eine exponentielle Familie.
3. Die Familie $(p_{\mu,\sigma})_{(\mu,\sigma)\in\Theta}$ ist keine (zweiparametrige) exponentielle Familie.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Die a priori-Verteilung des Parameters θ sei ein Gamma-Verteilung mit festen Parametern $a > 0, \lambda > 0$, d.h. $\pi := \Gamma(a, \lambda)$. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien bedingt auf θ i.i.d. und exponentialverteilt zum Parameter θ. Bestimmen sie die a posteriori Verteilung $\pi(\theta|X = x)$ für θ. Simulieren Sie weiterhin Realisierungen von θ bezüglich der a priori- und der a posteriori-Verteilung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $X_1 \sim Exp(\theta)$. Der Parameter θ habe die a priori-Verteilung $Exp(1)$. Berechnen Sie die a posteriori-Verteilung von θ gegeben die Beobachtungen $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Seien X und Y Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert. Es bezeichne f_{XY} die gemeinsame Dichte von X und Y, f_X, f_Y die Dichten von X bzw. Y und $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$ die jeweils bedingten Dichten. Zeigen Sie

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)\, f_{Y|X}(y|z)\, dz}.$$