Stochastik Teil 2 — SS 2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 11

Abgabe: 26.06.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die Familie der geometrischen Verteilungen mit Erfolgswahrscheinlichkeit in $(0,1)$ eine Exponentialfamilie ist und gegebenenfalls ob sie in kanonischer Form vorliegt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit jeweils folgender Dichte. Finden Sie in allen Fällen eine reellwertige suffiziente Statistik T für θ basierend auf der Beobachtung von $(X_1, \dots, X_n)$.

(a) X_1 ist nichtzentral doppelt exponentialverteilt mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(\frac{-|x-\mu|}{\theta}\right),$$

wobei $\theta > 0$ und μ bekannt sei.

(b) X_1 ist gleichverteilt auf dem Intervall $(-\theta, \theta)$ mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} 1_{(-\theta,\theta)}(x),$$

wobei $\theta > 0$.

(c) X_1 ist invers Gamma-verteilt mit der Dichte

$$p_\theta(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) 1_{\mathbb{R}_{>0}}(x),$$

wobei $\theta = (\alpha, \beta)$ und $\alpha, \beta > 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-|x-\theta|\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass p_θ eine Dichtefunktion ist.

(b) Sei P_θ das zur Dichte p_θ gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie, dass $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ keine exponentielle Familie ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei X Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_\lambda(k) = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, \cdots\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X = \lambda \qquad\qquad \mathrm{Var}\,(X) = \lambda$$

gilt, indem Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_λ als einparametrige natürliche exponentielle Familie darstellen und d_0 ableiten.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Sei $\mathcal{P} = \{p(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ ein reguläres statistisches Modell, $X \sim \mathcal{P}$, die Statistiken $T(X)$ und $S(X)$ mit $T = \eta(S)$ und einer messbaren Abbildung η gegeben. Zeigen Sie: Falls $T(X)$ suffizient für θ ist so ist auch $S(X)$ suffizient für θ.