UNI FREIBURG

Stochastik Teil 2 **SS 2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Anwesenheitsblatt

Aufgabe 1. Sei Ω eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subset \Omega\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2. (a) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und $Y = X^2$. Zeigen Sie, dass $Cov\left(X, Y^2\right) = 0$, aber X und Y abhängige Zufallsvariablen sind.

(b) Sei $Z := (X, Y)$ bivariat standardnormalverteilt und es gelte $Cov(X, Y) = 0$. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.
Bemerkung: Z muss nicht zwingend bivariat standardnormalverteilt sein, sondern lediglich bivariat normalverteilt.

Aufgabe 3. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Varianz σ^2. Die Stichprobenvarianz ist definiert durch

$$s^2(\boldsymbol{X}) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2, \text{ wobei } \bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Zeigen Sie, dass die Stichprobenvarianz erwartungstreu ist, d.h. $\mathbb{E}\left(s^2(\boldsymbol{X})\right) = \sigma^2$.

Aufgabe 4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $X_1 \sim Bern(p)$, wobei $p \in (0,1)$. Zeigen Sie

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p).$$