Stochastik Teil 2 **SS 2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stochastik-ss-2019

Übung 9

Abgabe: 22.05.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 18 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{A}$ ein Ereignis mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{A} \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

(b) Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte p_X und $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Zeigen Sie, dass für jede Zufallsvariable Y mit existierender Dichte p_Y der Zusammenhang $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien X, Y Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Zeigen Sie, dass für alle messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left((X - g(Y))^2\right) \geq \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|Y))^2\right)$$

Hinweis: Vielleicht ist die Ungleichung $a^2 \leq 2(a-b)^2 + 2b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ nützlich.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Finden Sie ein nichttriviales Beispiel für folgenden Sachverhalt: Bei Kenntnis der Realisation von Y kann die Realisation von X perfekt vorhergesagt werden in dem Sinne, dass

$$\mathbb{E}(X|Y) = X \text{ und } \operatorname{Var}(X|Y) = 0.$$

Andererseits bringt die Kenntnis der Realisation von X keine Information über die Realisation von Y in dem Sinne, dass

$$\operatorname{Var}(Y|X) = \operatorname{Var}(Y).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Weiterhin sei $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2$. Zeigen Sie, dass die Dichte von Y für $y \geq 0$ durch

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}$$

gegeben ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Faltungsformel für Dichten von Summen von Zufallsvariablen benutzen.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Simulieren Sie 10,000 $\Gamma(2,1)$-verteilte Zufallsvariablen und überprüfen Sie empirisch die Gültigkeit von Aufgabe 3b des letzten Blatts für verschiedene Werte c. Simulieren Sie weiterhin 10,000 $\Gamma(1,1)$-verteilte Zufallsvariablen und überprüfen Sie die empirisch die Gültigkeit von Aufgabe 3a.