Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 12

Abgabetermin: Dienstag, 23.07.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Bonuspunkte)

Der Wechselkurs $S = (S_t)_{t\geq 0}$ des US-Dollars (d.h. der Preis von 1 US-Dollar in Euro) genüge der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

wobei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung sei. Der Wechselkurs des Euro in US-Dollar ist dann $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ mit $\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t}$. Leiten Sie die stochastische DGL ab, der $\tilde{S}$ genügt, und folgern Sie, dass für $0 < \mu < \sigma^2$ sowohl S als auch $\tilde{S}$ Submartingale sind.

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)

Sei $L = (L_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess bzgl. $\mathbb{P}$, dessen momenterzeugende Funktion

$$M_{L_t}(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{uL_t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{uL_1}]^t$$

auf einem Intervall (a, b) mit $a < 0 < b$ existiere. Für $\theta \in (a, b)$ sei die *Esscher-Transformierte* $\mathbb{Q}^\theta$ definiert durch

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^\theta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \frac{e^{\theta L_t}}{M_{L_t}(\theta)}.$$

Zeigen sie:

a) $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ ist ein Dichteprozess, und damit gilt $\mathbb{Q}^\theta \sim_{loc} \mathbb{P}$.

b) L ist auch ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{Q}^\theta$.

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte)

Sei $L = (L_t)_{t\geq 0}$ eine Lévy-Prozess. Begründen Sie, dass der Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ mit $S_t = S_0 e^{\sigma L_t + \mu t}$ im Allgemeinen keine Lösung der stochastischen DGL

$$dS_t = S_{t-}(\mu dt + \sigma dL_t)$$

ist. Wie sieht die stochastische DGL aus, deren Lösung $S_t = S_0 e^{\sigma L_t + \mu t}$ ist?